Die Koch'sche Schneeflocke

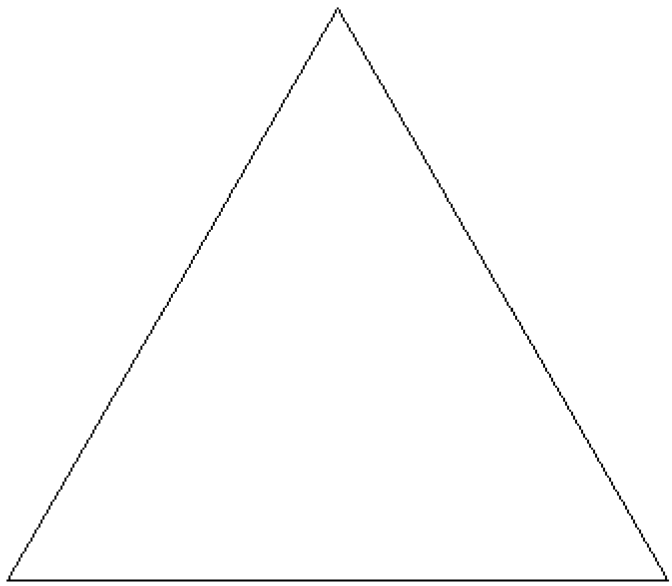
Flächeninhalt endlich und Umfang unendlich.

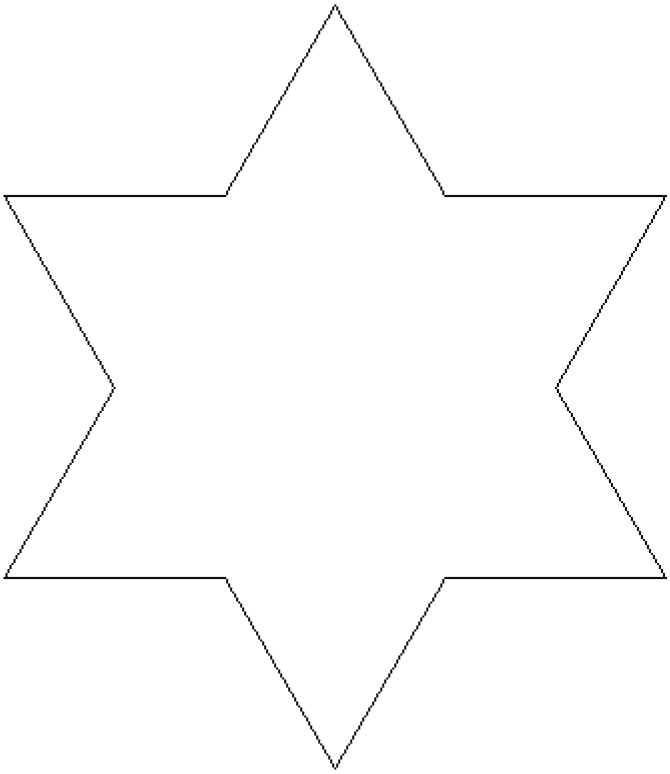
So entsteht sie:

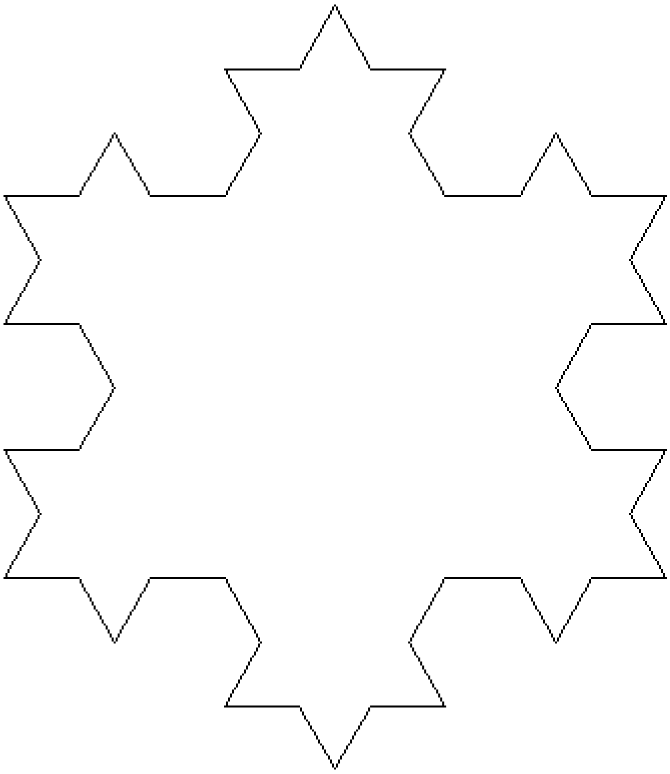
1. Schritt:
Man nimmt ein gleichseitiges Dreieck und drittelt dessen Seiten.

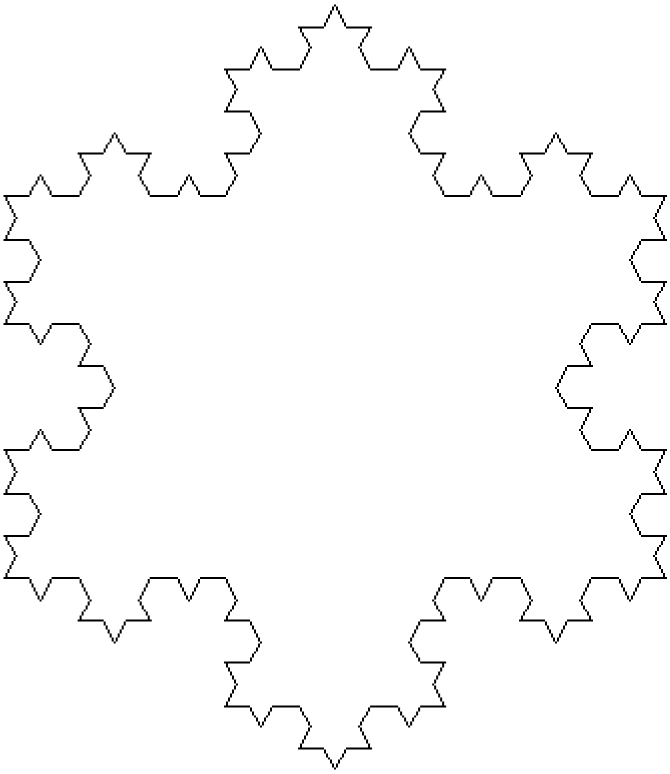
2. Schritt:
Über jedem mittleren Seitendrittel wird ein neues gleichseitiges Dreieck errichtet und dabei die Nahtlinie zum ersten Dreieck weggelassen.

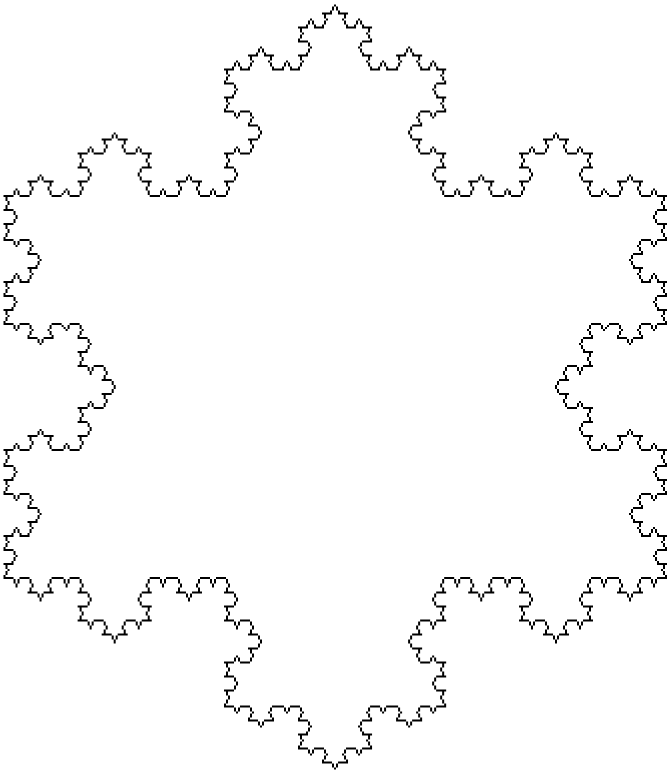
3. Schritt:
Wiederhole den 2. Schritt mit allen Teilstrecken der Umfangslinie.
(vgl. die Bildfolge unten!)

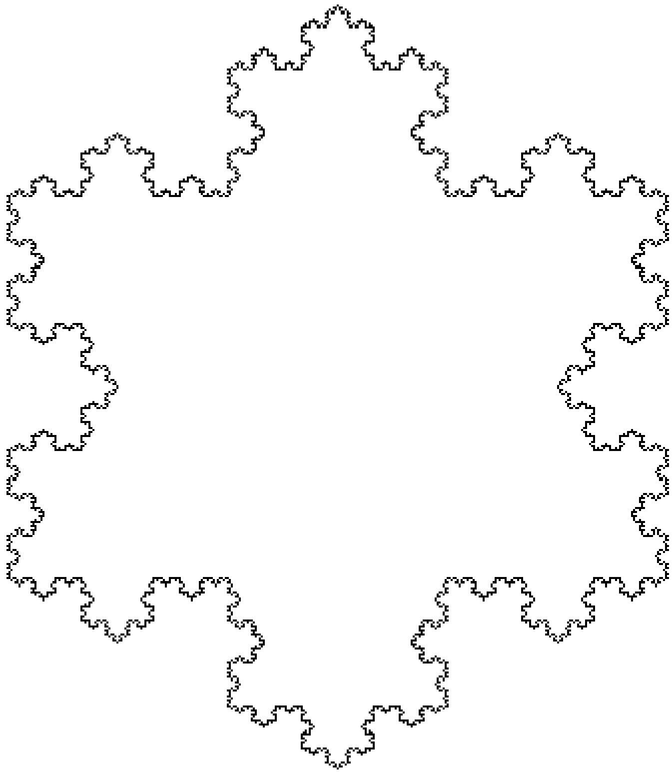












Wie entwickelt sich der Flächeninhalt der so entstehenden Figuren?

Als erstes ist da der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks, er sei A.
Dann sind es 3 zusätzliche mit nur ein Drittel so langen Seiten , also jeweils nur $(1/3)^2$ so großem Inhalt, also ist der Flächeninhalt insgesamt
$A + 3*1/9\ A = A*(1 + 3/4*4/9)$.
Dann sind es 12 mit wiederum nur ein Drittel so langen Seiten, also jeweils nur $(1/9)^2$ so großem Inhalt,
also ist der Flächeninhalt insgesamt nun
$A*(1 + 3/4*4/9) + 12/81\ A = A*(1 + 3/4*4/9 + 3/4*(4/9)^2)$.
Dann sind es 48 mit wiederum nur ein Drittel so langen Seiten, also jeweils nur $(1/27)^2$ so großem Inhalt,
also ist der Flächeninhalt insgesamt nun
$A*(1 + 3/4*4/9 + 3/4*(4/9)^2) + 48/729 = A*(1 + 3/4*4/9 + 3/4*(4/9)^2 + 3/4*(4/9)^3)$.
Der Flächeninhalt entwickelt sich zu
$A*(1/4 + 3/4 + 3/4*4/9 + 3/4*(4/9)^2 + 3/4*(4/9)^3)$
$= 1/4*A + 3/4*A*(1 + 4/9 + (4/9)^2 + (4/9)^3 + ...)$
...
In der Klammer entwickelt sich eine geometrische Reihe, die den Wert 9/5 annimmt.
Somit strebt der Flächeninhalt der Figur, die bei immer weiterer Durchführung der obigen Schrittfolge entsteht, gegen $1/4*A + 3/4*A*9/5 = 8/5*A$,
also **gegen eine endliche Zahl.**

Wie entwickelt sich Länge der Figurlinie, also der Umfang, der so entstehenden Figuren?

Als erstes ist da der Umfang des gleichseitigen Dreiecks (mit Seitenlänge a), er sei $U = 3*a$.
Dann sind es 12 nur $1/3*a$ lange Seiten, also ist der Umfang insgesamt

$4*a = 4/3*U$.
Dann sind es 4*12 nur 1/3*1/3*a lange Seiten, also ist der Umfang insgesamt nun $48/9*a = 16/9*U = (4/3)^2*U$.
Dann sind es 4*4*12 nur 1/3*1/3*1/3*a lange Seiten, also ist der Umfang insgesamt nun $192/27*a = 64/27*U = (4/3)^3*U$.
...
Da der Klammerausdruck (4/3) als Zahl größer als 1 immer höher potenziert sich über alle Maßen entwickelt, strebt der Umfang der Figur, die bei immer weiterer Durchführung der obigen Schrittfolge entsteht, **gegen Unendlich**.