(In Bearbeitung: Version 4. Jan. 2015)

Der Computer im Physikunterricht

1. Der Stellenwert des Computers im Physikunterricht

Im Alltag des Physikers, sei es als Experimentator oder Theoretiker, ist der Computer allgegenwärtig. Sein Einsatz kann aber ganz unterschiedliche Gründe haben: Beispielsweise steuert im Labor der Computer Experimente, sammelt Messdaten und führt Datenfilterungen und Datenanalysen durch. Dann vergleicht er Messresultate mit physikalischen Gesetzmässigkeiten. Für den Theoretiker führt der Computer manchmal schwierige algebraische Rechnungen und Umformungen durch oder simuliert die Theorie in einem virtuellen Experiment.

Ganz anders im gymnasialen Physikunterricht: Hier wird der Computer immer noch nur zögerlich eingesetzt, obschon es an Geräten und Software nicht fehlt. Ein Grund mag sein, dass Physiklehrpersonen manchmal ein gespaltenes Verhältnis zur Programmierung haben. Während es vor 30 Jahren selbstverständlich war, dass jeder Physiker wenigsten mit einer höheren Programmiersprache wie Basic, Pascal. C oder sogar mit Maschinensprache vertraut war, gilt dies heute für die für die weit verbreiteten Programmiersprachen C++, C#, Pascal/Delphi, LabView und Java nicht mehr. Eine Umfrage zeigt, dass das Programmieren mit diesen Programmier-sprachen vor allem auf Grund des grafischen Benutzerinterfaces und der Objektorientierung als zu schwierig und für den Unterricht ungeeignet betrachtet wird. Zudem können sich die Physiklehrperson leider selten auf Programmierkenntnisse der Schülerinnen und Schüler abstützen, da es keinen verbindlichen Informatikunterricht gibt oder dort nicht oder in einer nicht für die Physik anwendbaren Programmiersprache unterrichtet wird. Die Verwendung von Tabellenkalkulation (Excel) oder des programmierbaren Taschenrechners ist eher ein Rettungsanker als eine ernstzunehmende Alternative. Die Motivation und der Erfolg beim Einsatz von Excel und Taschenrechnern ist bei Schülerinnen und Schülern darum erfahrungsgemäss bescheiden.

In diesem Dilemma zeigt sich, dass die Programmiersprache Python einen echten Ausweg bieten kann. Als Skriptsprache gilt Python gerade bei Nichtinformatikern als ebenso einfach wie früher Basic, da Python wie Basic und Pascal einen globalen Namensraum besitzt und damit ohne Klassenkonstruktionen auskommt. Andererseits besitzt aber Python ganz anders als Basic die Mächtigkeit einer modernen Programmiersprache und ist darum auch für den weiterführenden Informatikunterricht geeignet. Diese Anwendbarkeit auch auf komplexe Problemstellungen in allen Fächern macht gerade den Unterschied zur Tabellenkalkulation, zu anwendungsspezifischen Sprachen wie LabView, PHP und HTML5 oder zu didaktischen auferlegten Korsetten wie Kara, Logo, Greenfoot, Alice oder Scratch.

Trotz aller zukünftiger Begeisterung an der Verwendung des Computers im Fachunterricht müssen aber immer Ziele und Inhalte des Physikunterrichts und nicht die der Informatik im Vordergrund stehen. Gerade deswegen ist es wichtig, ein Programmiertool zu verwenden, das von Lehrpersonen und Schülerinnen und Schülern mit minimalem Lernaufwand einsetzbar ist und auf den eigenen Rechnern aller Plattformen, sowie in geschützten Computerpools leicht installiert werden kann.

Gerade darin kann die Programmiersprache Python mit der plattformübergreifenden TigerJython IDE gemäss dem Slogan **Copy, Click & Go** punkten, denn es genügt, eine einzige Datei zu kopieren und mit einem Mausklick die Programmierumgebung zu starten. Da die Distribution bereits viele wichtige Zusatzmodule für die Turtlegrafik, Koordinatengrafik, Robotik und Spielprogrammierung enthält, sind auch keine Nachinstallationen notwendig.

2. Theorie, Experiment und Simulation

Fragt man an einer Physikprüfung danach, welches das grundlegenden Problemlösungsverfahren in den Naturwissenschaften ist, so erwartet man als Antwort, dass ein Problem grundsätzlich entweder theoretisch, d.h. unter Anwendung von physikalischen Gesetzen oder experimentell, d.h. mit Beobachtungen und Messungen zu lösen ist. Dabei übersieht man aber, dass in der Praxis des Naturwissenschaftlers heutzutage oft eine dritte Methode eingesetzt wird, nämlich die Computersimulation. In der Simulation wird die Realwelt ähnlich wie in einer Theorie modellartig in einer virtuellen Welt abgebildet und statt mit algebraischen mit numerischen Methoden behandelt. Man spricht darum auch oft von einem *Simulationsexperiment*. Wegen der notwendigen Vereinfachungen und er begrenzten Rechengenauigkeit sind die Resultate mit Fehlern behaftet und müssen darum sorgfältig diskutiert werden. Das Simulationsexperiment besitzt in der physikalischen Forschung einen ähnlichen Stellenwert wie Theorie und Experiment und sollte darum auch einen viel grösseren Raum im Physikunterricht einnehmen. An einfachen exemplarisch ausgewählten Situationen und mit einfachen Programmierwerkzeugen lässt dich die Gleichwertigkeit von Theorie, Experiment und Simulation zuerst in der Mechanik, später aus anderen Gebieten besonders hübsch zeigen.

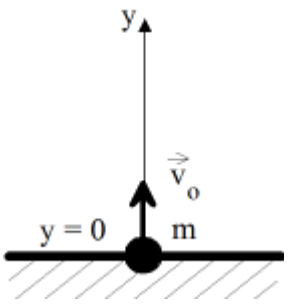
Das hier vorgeschlagene methodische Vorgehen ist das Folgende: Zuerst wird an einem Beispiel, das sich leicht theoretisch behandeln lässt, gezeigt, dass die numerische Lösung wegen der endlichen Rechengenauigkeit immer fehlerhaft ist, der Fehler allerdings bei entsprechendem Rechenaufwand meist so klein gehalten werden kann, dass die Abweichungen der Simulation innerhalb der Grenzen der Beobachtung liegen. Ziel dieser ersten Phase ist es, Vertrauen in die Simulationsmethode zu gewinnen. Nachher wird die gleiche Methode auf Probleme angewendet, für welche die theoretische Behandlung im Mittelschulunterricht zu aufwendig oder zu schwierig ist. Dadurch erfahren Schülerinnen und Schüler, dass die Physik auf reale, praxisrelevante Situationen anwendbar ist, ohne dass diese extrem vereinfachenden Modellannahmen (reibungslos, eindimensional, usw.) unterworfen werden.

2.1 Newtonsche Mechanik

Eine der Grundaufgaben der Physik besteht darin, das zeitliche Verhalten eines exakt präparierten Systems vorauszusagen, oder anders gesagt: auf Grund von bekannten Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ und bekannten äusseren Einflüssen den Zustand z als Funktion der Zeit $z = z(t)$ zu ermitteln. Für den einfachen Fall einer einzelnen Masse m, die sich in einem Kraftfeld befindet, heisst dies, dass aus Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit Ort und Geschwindigkeit zu jeder späteren Zeit $t > 0$ anzugeben ist.

2.1.1 Vertikaler Wurf

Als erstes Beispiel betrachten wir die eindimensionale Bewegung mit konstanter Beschleunigung, also die vertikale reibungslose Wurfbewegung. Wählen wir die die Koordinatenachse y vertikal nach oben mit dem Ursprung bei der Abwurfstelle, so lautet die Ortsfunktion bekanntlich



$$y = v_o t - \frac{g}{2} t^2$$

wobei v_o die Anfangsgeschwindigkeit und g die Erdbeschleunigung sind. In der Simulation wählt man einen diskreten Zeitschritt dt und nimmt als Näherung für die Änderung des Ortes eine gleichförmige und für die Änderung der Geschwindigkeit eine gleichmässig beschleunigte Bewegung an. Dieses Vorgehen ist für viele Simulationen sehr typisch. Es ist anzunehmen, dass der Fehler dieser Näherung umso kleiner ist, je kleiner dt im Vergleich zur gesamten Beobachtungszeit T ist. Garantiert ist dies aber nicht, da bei kleiner werdendem dt ja auch die Schrittzahl $n = T / dt$ ansteigt und damit der kumulierte Fehler mit zunehmendem n nicht unbedingt sinkt. Glücklicherweise ist dies aber nur in exotischen Fällen ein Problem.

In *mechanik1.py* zeigt sich, wie einfach die Umsetzung in ein Python-Programm ist. Dabei werden die Werte für y und v im Ausgabefenster formatiert ausgeschrieben.

```
# mechanik1.py
# Vertikaler Wurf ohne Luftwiderstand

g = 9.81 # Erdbeschleunigung (m/s^2)
dt = 0.1  # Zeitschritt (s)

# Anfangsbedingungen:
t = 0
y = 0   # Ort (m)
v = 20 # Geschwindigkeit (m/s)

while t < 10:
    print "%4.1f%8.2f%8.2f" %(t, y, v)
    v = v - g * dt
    y = y + v * dt
    t = t + dt
```

Ausführen mit Webstart

Die Simulation zeigt, dass die Wurfhöhe ungefähr 20 m beträgt. Da v die zeitliche Ableitung von y ist. handelt es sich bei der hier verwendeten Methode zur Berechnung von y um das **Eulerverfahren** (bzw. **Runge-Kutta 1. Ordnung**):

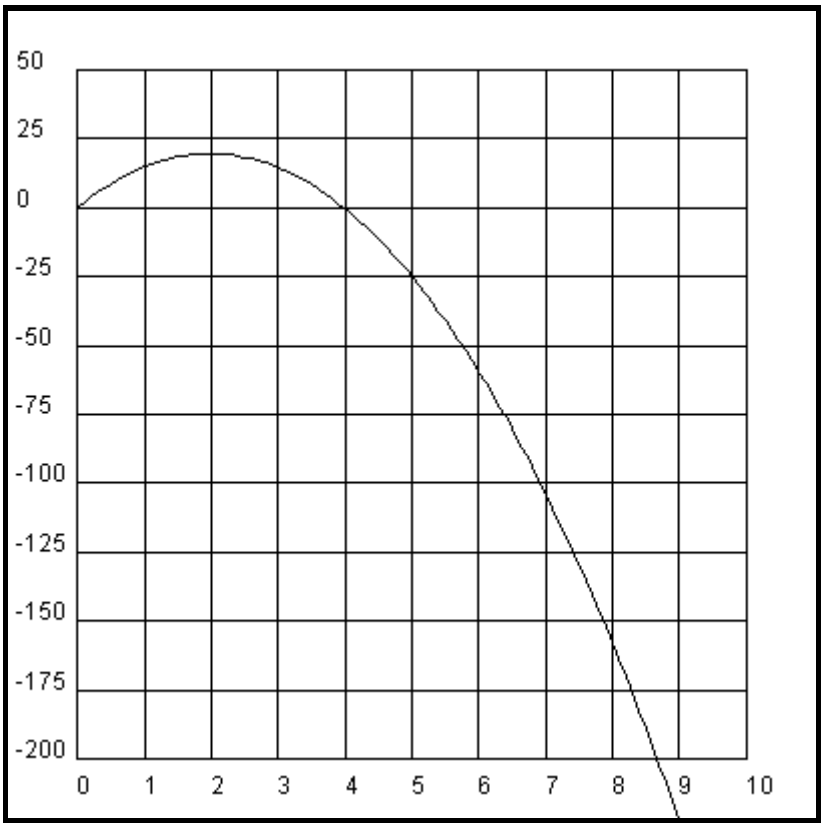
$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + y'(t_i)\mathrm{h}$$

Manchmal spricht man auch von einer **Linearisierung**.

2.1.2 Vertikaler Wurf mit Grafik

Fast alle Simulationen werden mit grafischen Ausgaben veranschaulicht. In *TigerJython* steht dazu ein Grafikfenster *GPanel* zur Verfügung, das ein frei wählbares dezimales Koordinatensystem hat und darum für physikalische Probleme gut geeignet ist. Damit entfallen mühsame Umrechnungen auf Pixelkoordinaten.

```
# mechanik2.py
# Vertikaler Wurf ohne Luftwiderstand mit Grafik

from gpanel import *

g = 9.81 # Erdbeschleunigung (m/s^2)
dt = 0.1 # Zeitschritt (s)

# Anfangsbedingungen:
t = 0
y = 0   # Ort (m)
v = 20 # Geschwindigkeit (m/s)

makeGPanel(-1, 11, -220, 70) #xmin, xmax, ymin, ymax
drawGrid(0, 10, -200, 50)
move(t, y)
while t < 10:
     draw(t, y)
     v = v - g * dt
     y = y + v * dt
     t = t + dt
```



Ausführen mit Webstart

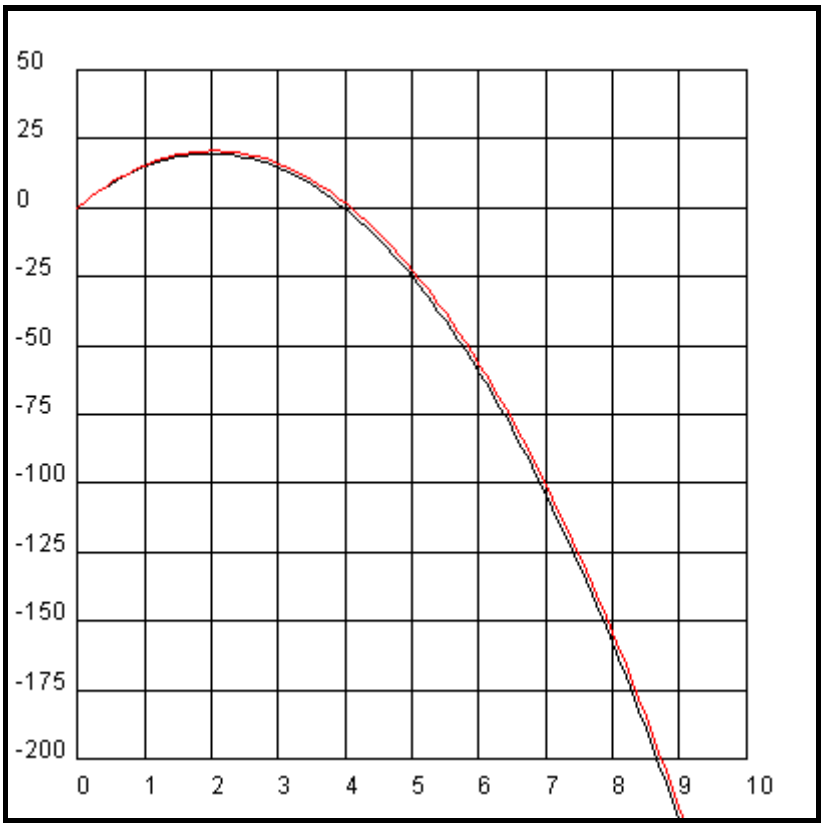
Das Koordinatengitter und die Beschriftung sind zwar rudimentär, lassen sich aber automatisch mit der einzigen Anweisung *drawGrid()* einbauen.

2.1.3 Vertikaler Wurf. Vergleich mit Theorie

Um das Vertrauen die Simulation zu stärken, wird der simulierte Verlauf mit der theoretischen Voraussage verglichen. Dabei zeigt sich selbst bei einem relativ grossen Zeitschritt von $dt = 0.1\ s$ eine gute Übereinstimmung. Es ist nun aber im Gegensatz zum Menschen für den Computer kein Problem, die Simulation von einem zehn oder hundert Mal kleineren Schritt auszuführen. Es ist dann praktisch kein Unterschied zwischen Theorie und Simulation mehr zu erkennen.

```
# mechanik3.py
# Vertikaler Wurf ohne Luftwiderstand
# Vergleich mit Theorie

from gpanel import *

g = 9.81 # Erdbeschleunigung (m/s^2)
dt = 0.1 # Zeitschritt (s), kann verkleinert werden

# Anfangsbedingungen:
t = 0
y = 0   # Ort (m)
v = 20 # Geschwindigkeit (m/s)

makeGPanel(-1, 11, -220, 70) #xmin, xmax, ymin, ymax
```

```
drawGrid(0, 10, -200, 50)
move(t, y)
while t < 10:
     draw(t, y)
     v = v - g * dt
     y = y + v * dt
     t = t + dt

# Theorie
setColor("red")
t = 0; y = 0; v0 = 20

move(t, y)
while t < 10:
     y = v0*t - g/2*t*t
     draw(t, y)
     t = t + dt
```



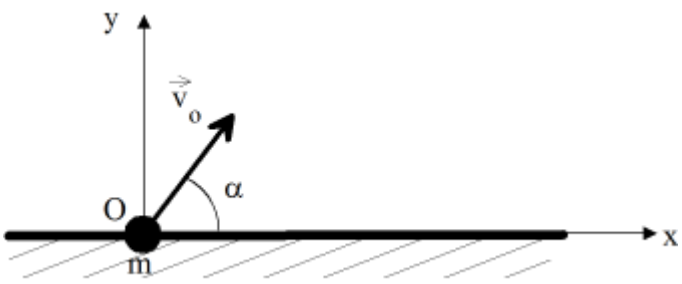
Ausführen mit Webstart

2.1.5 Schiefer Wurf mit Luftwiderstand (Ballistische Kurve)

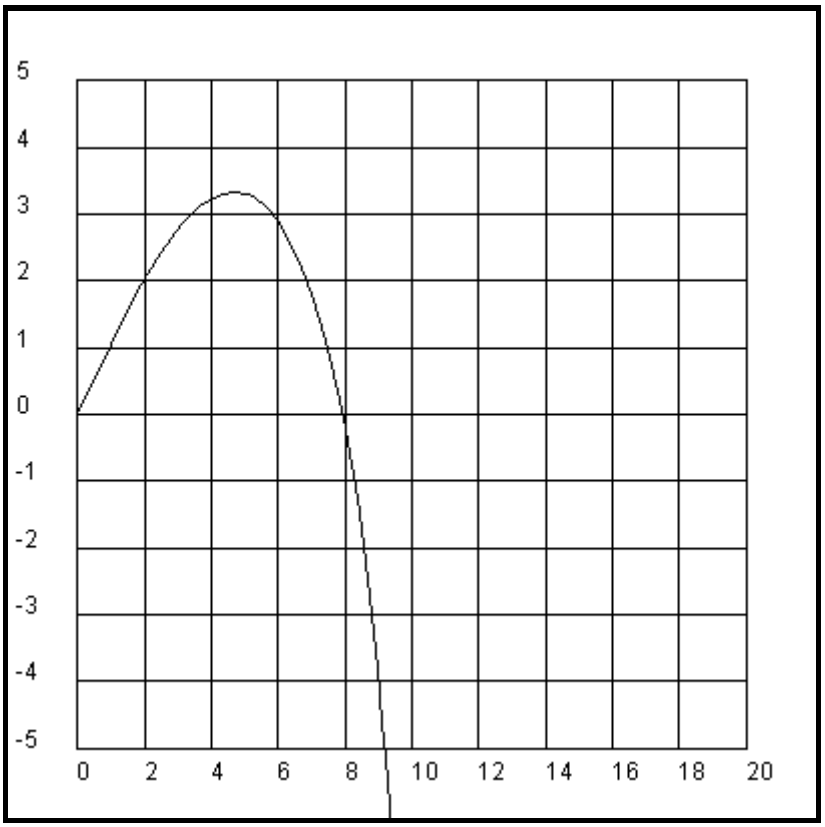
Mit gestärktem Vertrauen in die Simulation wenden wir sie auf einen Fall an, der sich mit elementaren Mitteln bereits nicht mehr behandeln lässt. Dabei werfen wir die

Masse m in homogenen Gravitationsfeld, nehmen aber an, dass diese eine zur Geschwindigkeit im Quadrat proportionale Luftreibung gemäss der Beziehung $R = \rho v^2$ oder in vektorieller Schreibweise

$\vec{R} = -\rho v^2 \frac{\vec{v}}{v} = -\rho v \vec{v}$ erfährt.



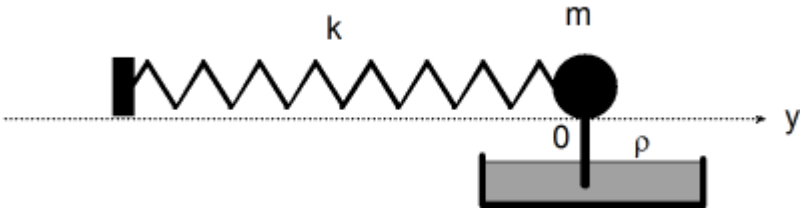

```
# mechanik4.py
# Schiefer Wurf mit Luftwiderstand
# Luftwiderstand prop v^2

from gpanel import *
from math import *

g = 9.81    # Erdbeschleunigung (m/s^2)
dt = 0.1    # Zeitschritt (s)

m = 8.8e-3 # Kugelmasse (kg)
rho = 1.06e-3 # Reibungskoeffizient

# Anfangsbedingungen:
t = 0
v0 = 20     # Anfangsgeschwindigkeit (m/s)
alpha = 50 # Abschusswinkel (Grad)
alpha = alpha / 180 * pi # Bogenmass
x = 0; y = 0
vx = v0 * cos(alpha)
vy = v0 * sin(alpha)

makeGPanel(-2, 22, -6, 6)
drawGrid(0, 20, -5, 5)
move(x, y)
while t < 10:
     draw(x, y)
     fx = -rho*sqrt(vx*vx + vy*vy)*vx      # Kraftkoordinaten
     fy = -m*g - rho*sqrt(vx*vx + vy*vy)*vy

     ax = fx/m           # Beschleunigungskoordinaten
     ay = fy/m

     vx = vx + ax*dt     # Geschwindigkeitskoordinaten
     vy = vy + ay*dt

     x = x + vx*dt;      # Ortskoordinaten
     y = y + vy*dt;

     t = t + dt
```



Ausführen mit Webstart

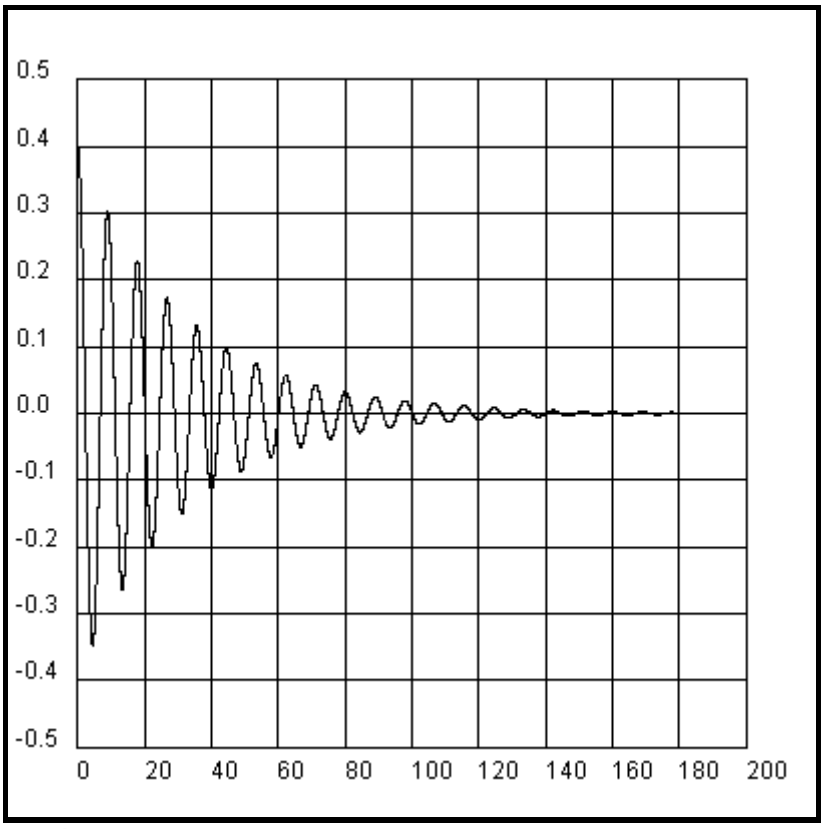
2.1.6 Gedämpfte Schwingung

Die harmonischen Schwingung wird wohl in jedem Physikunterricht behandelt, steht sie doch im Zentrum des Themengebiets "Schwingungen und Wellen", das wegen seines Aktualitäts-und Umweltbezugs, seinen Verbindungen zu anderen Themen weit über die Mechanik hinaus und seiner Beliebtheit bei Schülerinnen und Schülern zu den schönsten gymnasialen Themen überhaupt gehört. Bereits bei der Federschwingung werden wir aber bei der theoretischen Lösung mit einer Differentialgleichung und damit mit der Differentialrechnung konfrontiert. Ob dieser Weg gangbar ist, hängt von Schultyp und Schulstufe ab. Mit den oben erarbeiteten elementaren Programmierkenntnissen ist die Simulation geradezu trivial und benötigt keine weitergehenden mathematischen Vorkenntnisse. Wir betrachten gleich den Fall mit einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung.




```
# harmon1.py
# Gedämpfte harmonische Schwingung

from gpanel import *

dt = 0.01        # Zeitschritt (s)
```

```
d = 200           # Gesamtdauer (s)

m = 0.8           # Masse (kg)
k = 0.4           # Federkonstante (N/kg)
r = 0.05          # Reibungskoeffizient in N/m/s

t = 0; y = 0.4; v = 0 # Anfangsbedingungen

makeGPanel(-20, 220, -0.6, 0.6)
drawGrid(0, 200, -0.5, 0.5)

move(t, y)   # Anfangspunkt
while t < d:
    draw(t, y)                      # Zeichne
    a = -k*y / m - r / m * v        # Beschleunigung
    v = v + a*dt                    # Neue Geschwindigkeit
    y = y + v*dt                    # Neue Koordinate
    t = t + dt                      # Neue Zeit
```

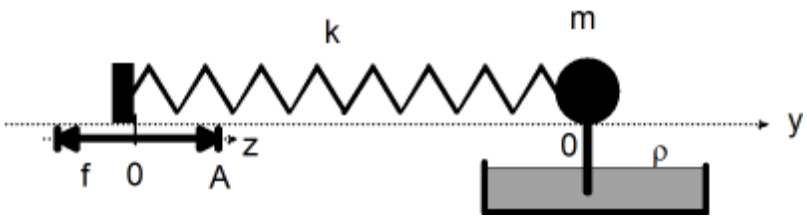


Ausführen mit Webstart

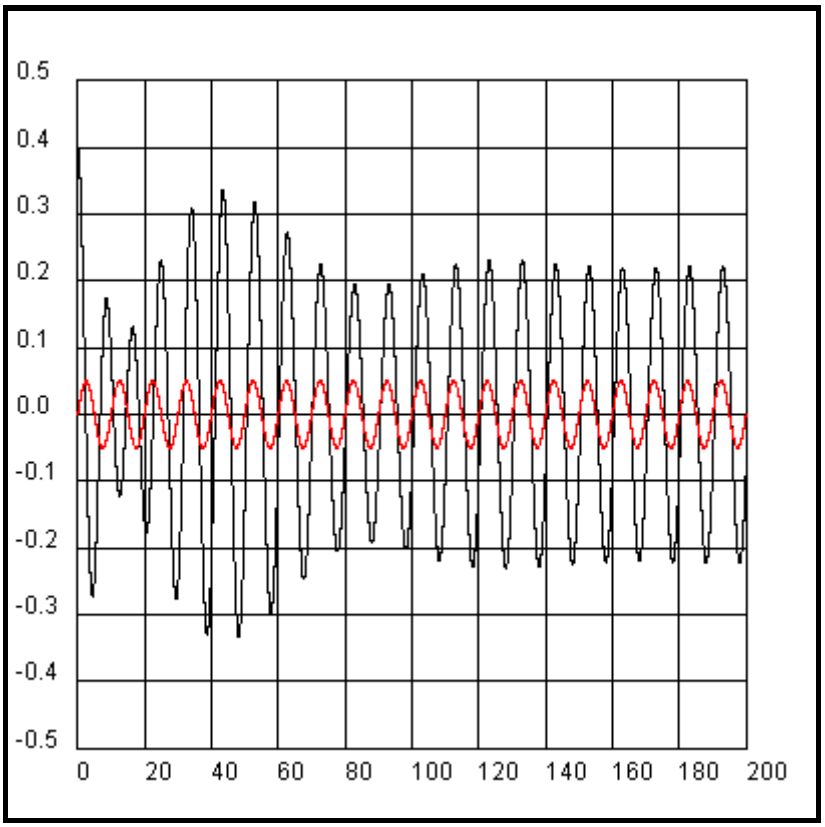
2.1.7 Erzwungene Schwingung

Noch spannender ist es, mit einer Computersimulation das fundamentale Phänomen der **Resonanz** zu untersuchen. Dabei ist der Anfangspunkt der Feder mit einem

sinusförmigen Erreger verbunden, der mit der Erregerfrequenz f schwingt. Das Simulationsprogramm ist kaum komplizierter.




```
# harmon2.py
# Erzwungene harmonische Schwingung

from gpanel import *
from math import *

dt = 0.01         # Zeitschritt (s)
d = 200           # Gesamtdauer (s)

m = 0.8           # Masse (kg)
k = 0.4           # Federkonstante (N/kg)
r = 0.05          # Reibungskoeffizient in N/m/s
y0 = 0.4          # Anfangsort (m)
v0 = 0            # Anfangsgeschwindigkeit

A = 0.05          # Erregeramplitude (m)
f = 0.1           # Erregerfrequenz (Hz)

t = 0; y = y0; v = v0 # Anfangsbedingungen
print "Eigenfrequenz =", sqrt(k / m) / 2 / pi, "Hz"

makeGPanel(-20, 220, -0.6, 0.6)
drawGrid(0, 200, -0.5, 0.5)

move(t, y0)   # Anfangspunkt
while t < d:
       draw(t, y)                      # Zeichne
       z = A * sin(2*pi*f*t)         # Erregerort
       a = -k*(y - z) / m - r / m * v    # Beschleunigung
       v = v + a*dt                    # Neue Geschwindigkeit
       y = y + v*dt                    # Neue Koordinate
       t = t + dt                      # Neue Zeit

setColor("red")
t = 0
move(0, 0)
while t < d:
     y = A*sin(2*pi*f*t)
     draw(t, y)
     t = t + dt
```

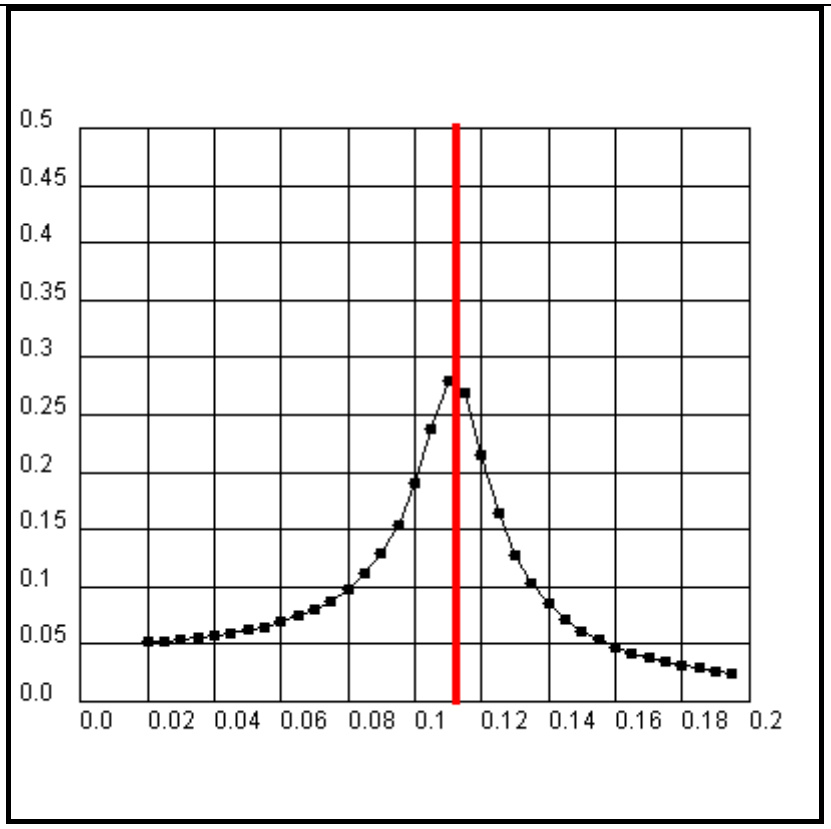


Ausführen mit Webstart

Durch Variation der Dämpfungskonstanten und der Erregerfrequenz können leicht Resonanzkurven aufgenommen werden. Es ist eine besonders motivierende Herausforderung, dies mit einem Programm automatisch zu machen.

```
# harmon3.py
# Resonanzkurve

from gpanel import *
from math import *

dt = 0.01         # Zeitschritt (s)
d = 200           # Gesamtdauer (s)

m = 0.8           # Masse (kg)
k = 0.4           # Federkonstante (N/kg)
r = 0.1           # Reibungskoeffizient in N/m/s
y0 = 0.4          # Anfangsort (m)
v0 = 0            # Anfangsgeschwindigkeit

fEigen = sqrt(k / m) / 2 / pi

A = 0.05          # Erregeramplitude (m)
makeGPanel(-20, 220, -0.6, 0.6)
f = 0.02 # Erregerfrequenz
points = []
```

```
while f <= 0.2:
     clear()
     drawGrid(0, 200, -0.5, 0.5)
     t = 0; y = y0; v = v0 # Anfangsbedingungen
     title("Erregerfrequenz = " + str(f) + " Hertz")
     move(t, y0)   # Anfangspunkt
     ampl = 0
     while t < d:
          draw(t, y)                          # Zeichne
          z = A * sin(2*pi*f*t)              # Erregerort
          a = -k*(y - z) / m - r / m * v    # Beschleunigung
          v = v + a*dt                        # Neue Geschwindigkeit
          y = y + v*dt                        # Neue Koordinate
          t = t + dt                          # Neue Zeit
          if t > 150:
              ampl = max(ampl, y)
     title("Erregerfrequenz = " + str(f) + " Hertz. Amplitude = " +
str(ampl))
     points.append([f, ampl])
     f += 0.005

clear()
makeGPanel(-0.02, 0.22, -0.1, 0.6)
drawGrid(0, 0.2, 0, 0.5)
title("Resonanzkurve")
for i in range(len(points)):
     move(points[i])
     fillCircle(0.002)
     if i > 0:
         draw(points[i-1])

setColor("red")
lineWidth(4)
line(fEigen, 0, fEigen, 0.5)
```



Ausführen mit Webstart

2.1.8 Keplersche Gesetze (Erdsatellit)

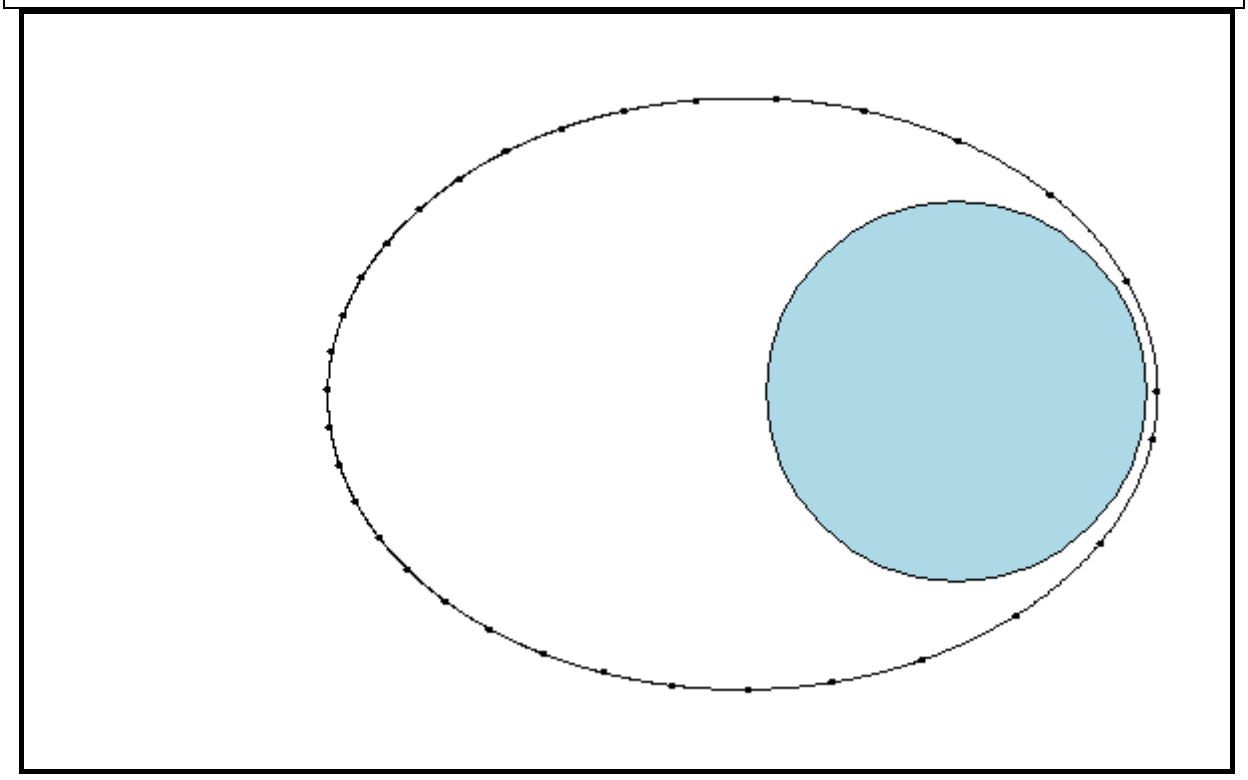
Eine weitere didaktische Knacknuss im Physikunterricht ist die Behandlung der Keplerschen Gesetze. Wegen ihrer grossen Bedeutung im Alltag, werden sie wohl in keinem Unterricht fehlen. Ihre Herleitung durch eine theoretische Behandlung des Zweikörperproblems ist aber jenseits der gymnasialen Mathematik. Auch hier kann die Simulation in überzeugender Art zeigen, dass Isaak Newton allein durch Anwendung der beiden Beziehungen

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{und} \qquad \vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}$$

die Keplerschen Gesetze beweisen konnte.

```
# kepler.py

from gpanel import *
from math import *
import time

dt = 10 # Zeitschritt (s)
RE = 6370 # Erdradius in km
G = 6.67e-11 # Gravitationskonstante (SI)
M = 5.97e24  # Erdmasse (kg)

# Anfangsbedingungen:
t = 0
h = 320   # Hoehe über der Erdoberfläche (km)
v0 = 9.5 # km/s

x = 1000 * (RE+h)
y = 0
vx = 0
vy = 1000 * v0

# coordinate span
xmin = -31000
xmax = 9000
ymin = -15000
ymax = 15000

def drawEarth():
    move(0, 0)
    setColor("lightblue")
    fillCircle(RE)
    setColor("black")
    circle(RE)

def step():
     global t, x, y, vx, vy
     # Zeichne Markierungskreis
     if  int(t) % 500 == 0:
          fillCircle(150)
          title("time = " + str(t) + " s")

     draw(x/1000, y/1000)
```

```
    r = sqrt(x*x+y*y)
    ax = -G*M*x / (r * r * r)
    ay = -G*M*y / (r * r * r)
    vx += ax*dt
    vy += ay*dt
    x += vx*dt
    y += vy*dt
    t += dt

makeGPanel(Size(1000, 750))
windowPosition(10, 10)
window(xmin, xmax, ymin, ymax)
drawEarth()
move(x/1000, y/1000)

while True:
    now = time.clock()
    step()
    while (time.clock() - now) < 0.01:
      delay(1)
    p = atan2(y, x)
    if p > -0.01 and p < 0:
        break
```



Ausführen mit Webstart

Um die Keplerschen Gesetze nachzuweisen, ist noch etwas Handarbeit mit den ausgedruckten Grafiken nötig.

2.2 Kosmologie

2.2.1 Dreikörperproblem

Die Keplerschen Gesetze beziehen sich auf ein extrem einfaches System, bei dem sich eine Masse im Gravitationsfeld eines fixen Zentralkörpers befindet.

Verallgemeinert man diese Situation auf mehrere Körper, die unter gegenseitiger gravitativer Wechselwirkung stehen, so nimmt der Schwierigkeitsgrad für eine analytische Lösung schnell zu. Bereits das allgemeine Dreikörperproblem ist bekanntlich nicht mehr geschlossen lösbar. Die Simulation verwendet aber dasselbe Muster und wird damit mit steigender Zahl der Himmelskörper nur unwesentlich schwieriger. Allerdings nehmen die Rechenzeiten zu und es gilt, sich kumulierende numerische Fehler in den Griff zu bekommen. Ein Mittel besteht darin, den Zeitschritt der Beschleunigung anzupassen.

Das Dreiköperproblem ist besonders instruktiv, da sich dabei typische beobachtbare Situationen diskutieren lassen. Je nach den Massen und der Anfangsbedingungen resultiert ein ganz anderes Verhalten. In den folgenden Beispiele werden Positionsdaten aus einer Datei verwendet, die ein Simulationsprogramm über eine längere Rechenzeit (mehrere Stunden) errechnet hat. Die Bewegung der drei Körper lässt sich so als Animation anschaulich verfolgen. Es handelt sich ausschliesslich um ebene Bewegungen.

Alle Programme verwenden eine Textdatei, in der die x, y Koordinaten der Körper 0, 1 und 2 zeilenweise in folgendem Format gespeichert sind:

x-coord0 spaces y-coord0
x-coord1 spaces y-coord1
x-coord2 spaces y-coord2
empty line

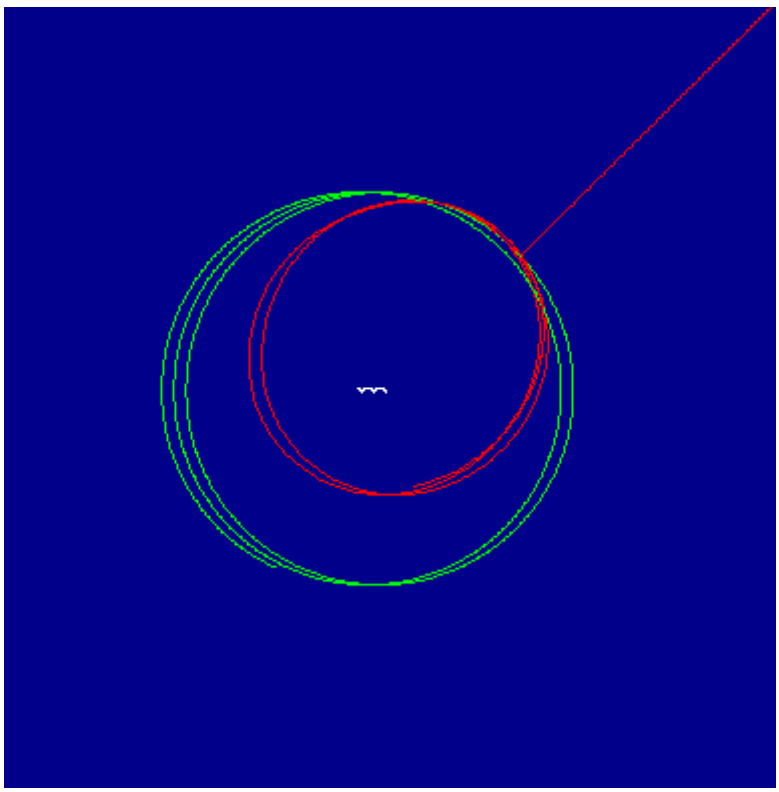
Das Ende der Daten ist durch eine Zeile mit dem String "eof" gekennzeichnet (an Stelle der Leerzeile). Die Datenfiles *astro1.dat, astro2.dat, astro3.dat, astro4.dat* und *astro5.dat* können gepackt von http://www.tigerjython.ch/download/astro.zip heruntergeladen werden und müssen sich im gleichen Verzeichnis wie das Programm befinden.

2.2.1.1 Einfang eines interstellaren Kometen

Ein aus dem interstellaren Raum einfallender Komet kann in einem Planetensystem eingefangen werden, falls er sich nahe an einem Planeten vorbei bewegt. Wie man mit einer Computersimulation herausgefunden hat, besitzt in unserem Sonnensystem allerdings nur Jupiter eine genügend grosse Masse, um Kometen einzufangen.

```
# astro1.py

from gpanel import *
import time
import copy

xcenter = 0
ycenter = 0
size = 4
tit = "Comet Capture."
dat = "astro1.dat"

def step():
    global pOld
    for k in range(3):  # index of body
        data = f.readline().split()
```

```
            p[k][0] = float(data[0])
            p[k][1] = float(data[1])
        data = f.readline()    # empty line
        if "eof" in data:  # End of file
            return True
        if pOld != None:
            for k in range(3):  # index of body
                setColor(colors[k])
                line(pOld[k], p[k])
        pOld = copy.deepcopy(p) # save old coordinates
        return False

colors = ["white", # trace 1st body
          "green", # trace 2nd body
          "red"]   # trace 3rd body

makeGPanel(xcenter - size/2, xcenter + size/2,
           ycenter - size/2, ycenter + size/2)
title(tit)
bgColor("darkblue")

p = [[0, 0], # [x, y] 1st body
     [0, 0], # [x, y] 2nd body
     [0, 0]] # [x, y] 3rd body
pOld = None
f = open(dat)
eof = False # end of file
dt = 0.015
while not eof and not isDisposed():
    t = time.clock()
    eof = step()
    while time.clock() - t < dt:
        delay(1)
f.close()
title(tit + " Done.")
```



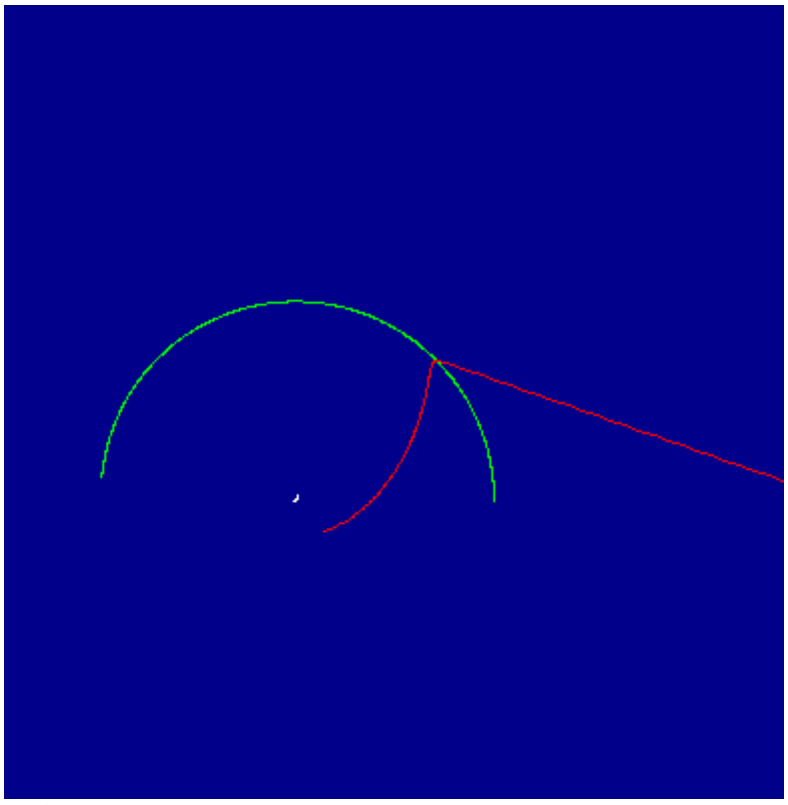
Ausführen mit Webstart

Die verschiedenen Programme unterscheiden sich nur durch die Wahl des Koordinatensystems und des Datenfiles.

2.2.1.2 Swing-by

Der Swing-by wird oft in der Raumfahrt verwendet, um die Bahn und die Geschwindigkeit eines Flugkörpers zu verändern, insbesondere um ihm eine grössere Schnelligkeit zu verleihen.

xcenter = 0.5
ycenter = 0.5
size = 4
tit = "Swing-by."
dat = "astro2.dat"

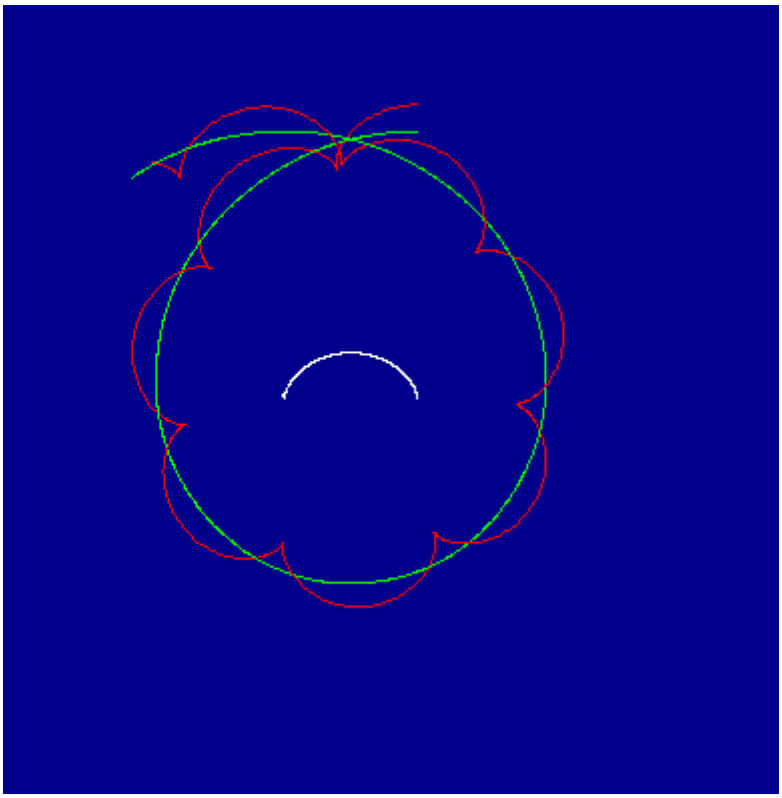


Ausführen mit Webstart

2.2.1.3 Sonne-Erde-Mond

Die Effekte werden durch eine andere Wahl der Massen verstärkt gezeigt.

xcenter = -0.1
ycenter = 0
size = 3
tit = "Sun-Earth-Moon."
dat = "astro3.dat"

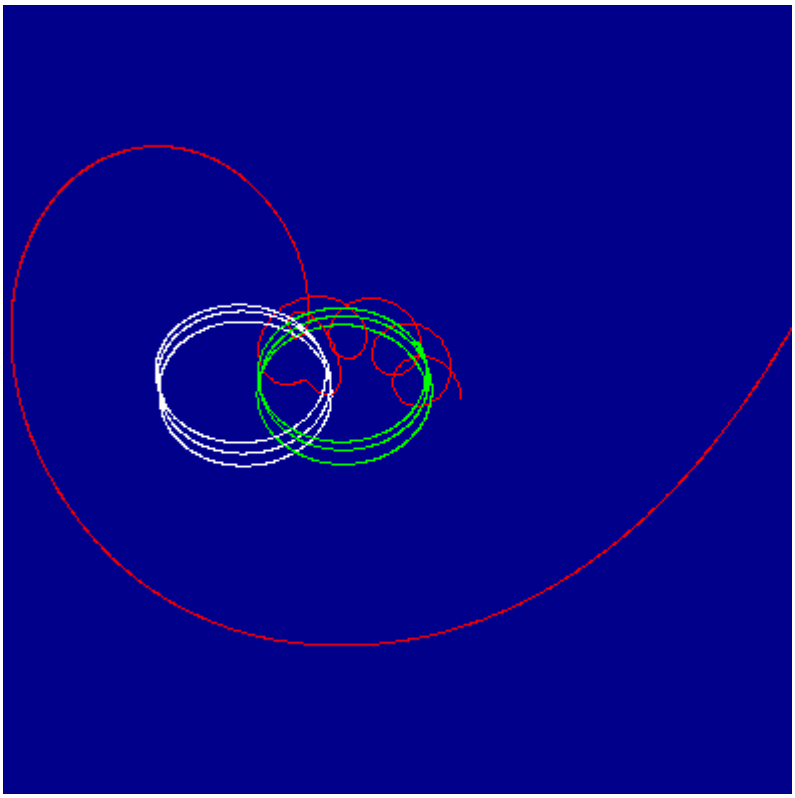


Ausführen mit Webstart

2.2.1.4 Doppelstern mit instabilem Planet

Die Stabilität eines Planetensystems ist kritisch. Es ist eigentlich verwunderlich, dass unser Sonnensystem offenbar stabil ist. Die Frage hat aber die Astronomen während Jahrhunderten beschäftigt. Im folgenden Beispiel wird eine Planet aus dem Doppelsternsystem hinauskatapultiert.

xcenter = 0.8
ycenter = 0
size = 6
tit = "Double-Star (unstable planet)."
dat = "astro4.dat"

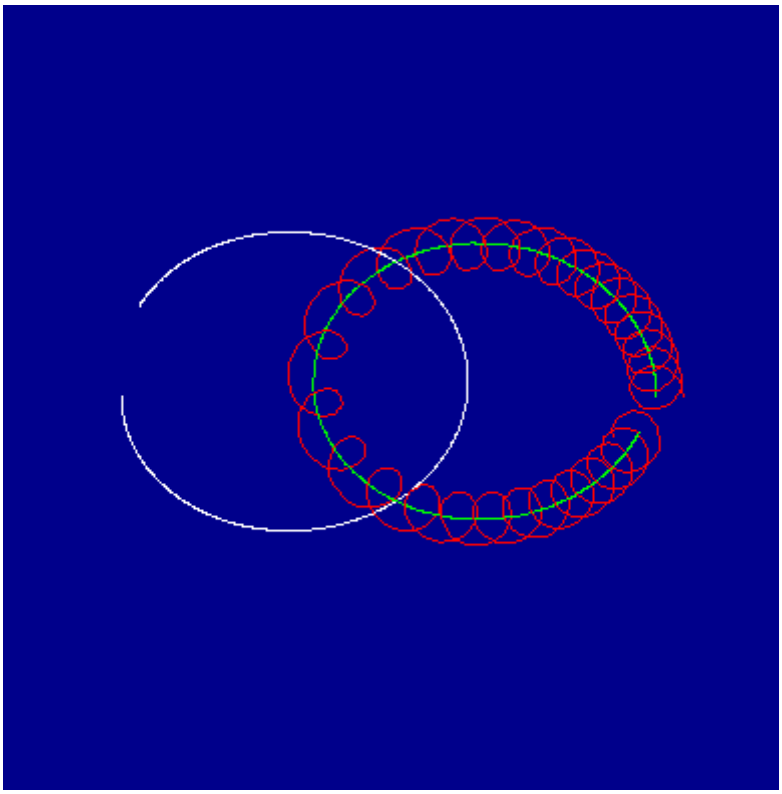


Ausführen mit Webstart

2.2.1.5 Doppelstern mit stabilem Planet

Das Doppelsternsystem mit einem Planet kann aber durchaus auch stabil sein. Die Frage stellt sich natürlich, ob dies auch in ferner Zukunft so sein wird.

xcenter = 0
ycenter = 0
size = 4
tit = "Double-Star (stable planet)."
dat = "astro5.dat"



Ausführen mit Webstart

2.2.2 Hubble-Gesetz

Die heute allgemein akzeptierte Entwicklungsgeschichte des Universums geht davon aus, dass es vor langer Zeit einen Urknall (Big Bang) gegeben hat, und sich seitdem das Universum ausdehnt. Im Vordergrund steht die Frage, wie lange der Urknall zurückliegt, was man als Alter des Universums bezeichnet. Der Astronom Hubble hat 1929 seine weltberühmten Untersuchungen publiziert, in denen er feststellte, dass es einen linearen Zusammenhang zwischen der Distanz d der Galaxien und ihrer Fluchtgeschwindigkeit v gibt. Das Hubble-Gesetz lautet:

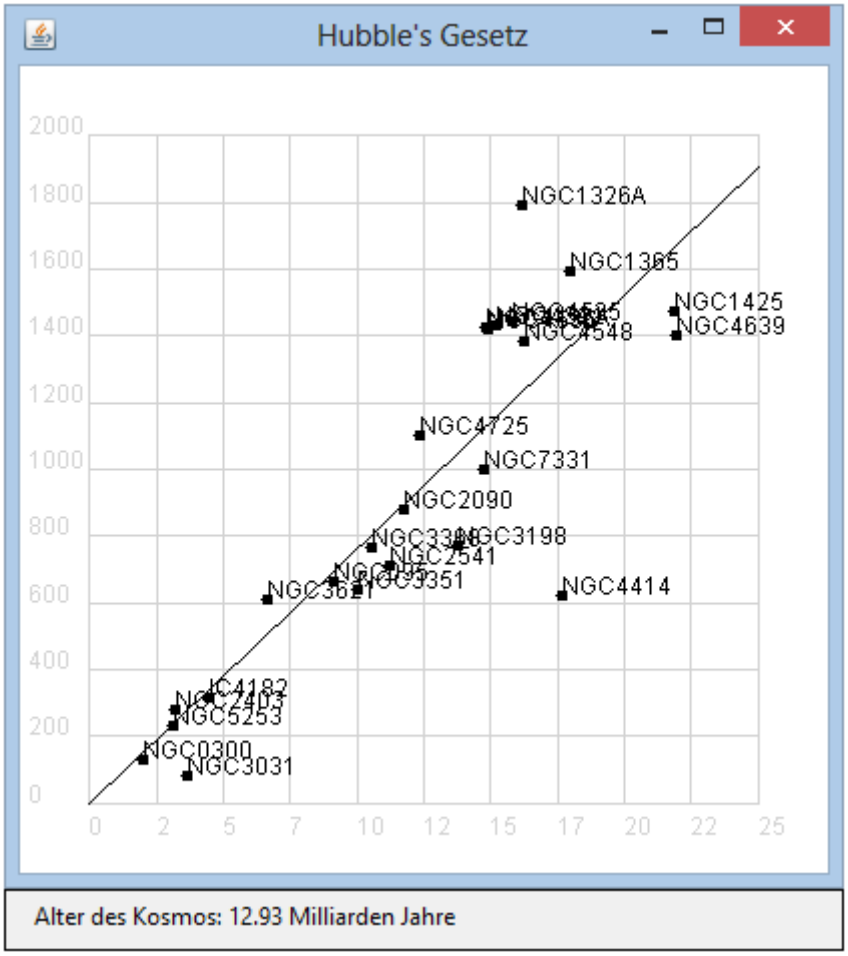
v = H * d

wo H die Hubble-Konstante genannt wird.

Man kann die astrophysikalischen Überlegungen nachvollziehen, indem man von folgenden experimentellen Daten ausgeht, die vom Hubble-Weltraumteleskop stammen

Im Programm werden die Daten jeder Galaxie in einer Liste [Name, Distanz (Mpc), Geschwindigkeit (km/s)] und alle Galaxiendaten wiederum in einer Liste gespeichert. Mit einer linearen Regression wird dann H bestimmt. Geht man davon aus, dass die Geschwindigkeit v einer bestimmten Galaxie konstant geblieben ist, so ist ihre Distanz d = v * T, wo T das Alter des Universums ist. Mit dem Hubble-Gesetz v = H * d folgt daraus T = 1 / H.

```
# hubble.py

from gpanel import *

# from Freedman et al, The Astrophysical Journal, 553 (2001) (Hubble Space
Telecope)
data = [["NGC0300", 2.00, 133], ["NGC095", 9.16, 664], ["NGC1326A", 16.14,
1794],
["NGC1365", 17.95, 1594], ["NGC1425", 21.88, 1473], ["NGC2403", 3.22, 278],
["NGC2541", 11.22, 714], ["NGC2090", 11.75, 882], ["NGC3031", 3.63, 80],
["NGC3198", 13.80, 772], ["NGC3351", 10.0, 642], ["NGC3368", 10.52, 768],
["NGC3621", 6.64, 609], ["NGC4321", 15.21, 1433], ["NGC4414", 17.70, 619],
["NGC4496A", 14.86, 1424], ["NGC4548", 16.22, 1384], ["NGC4535", 15.78,
1444],
["NGC4536", 14.93, 1423], ["NGC4639", 21.98, 1403], ["NGC4725", 12.36,
1103],
["IC4182", 4.49, 318], ["NGC5253", 3.15, 232], ["NGC7331", 14.72, 999]]

xval = []
yval = []

makeGPanel(-2.5, 27.5, -200, 2200)
title("Hubble's Gesetz")
addStatusBar(30)
drawGrid(0, 25, 0, 2000, "lightgray" )

for galaxy in data:
    d = galaxy[1]
    v = galaxy[2]
    xval.append(d)
    yval.append(v)
    move(d, v)
    fillCircle(0.2)
    text(galaxy[0])

H = linfit(xval, yval)[0]
line(0, 0, 25, H * 25)
mpc = 3.09E19  # 1 mpc in km
H = H / mpc # per s
t = 1 / H # age of cosmos in s
setStatusText("Alter des Kosmos: " + str(round(t / 3.14E16, 2)) + "
Milliarden Jahre")
```



Ausführen mit Webstart

2.3 Radioaktivität

Experimente mit radioaktiven Stoffen sind nicht gefahrlos und können nur unter Aufsicht durch eine entsprechend ausgebildete Lehrpersonen durchgeführt werden. Die Simulation hat zwar nie den gleichen Stellenwert wie das Experiment, ist aber gefahrlos und es wird kein Experimentiermaterial benötigt.

2.3.1 Radioaktiver Zerfall

Für radioaktive Nuklide gilt das fundamentale (von A. Einstein bestrittene) Naturgesetz, dass ein bestimmter Kern ohne Ursache zerfällt und die Wahrscheinlichkeit dp, dass dies im nächsten (infinitesimalen) Zeitintervall dt geschieht, unabhängig davon ist, wie lange es bereits vorhanden ist (gelebt hat). Es gilt

$$dp = \lambda * dt$$

wo man λ Zerfallskonstante nennt, die typisch für das Radionuklid ist.

Bei der Simulation einer Population von N0 Radionukliden sollte man diese als Einzelindividuen betrachten und nicht sofort die kontinuierliche Approximation

$$dN = -N * \lambda * \mathrm{dt}$$

betrachten, die auf eine Differentialgleichung führt, da man damit den typisch statistischen Charakter des radioaktiven Zerfalls, d.h. die Unvorhersehbarkeit für das Einzelindividuum und die Unregelmässigkeit der Anzahl Zerfälle in einem bestimmten Beobachtungsintervall verliert.

Für die Simulation löst man die Zeit in einzelne kleine Zeitschritte dt = 10 ms auf und unterwirft jedes einzelne (noch nicht zerfallenes) Isotop gemäss der Zerfallswahrscheinlichkeit einem möglichen Zerfall. Die Population wird in einer Liste z mit den Werten 0 für ein zerfallenes und 1 für eine noch nicht zerfallenes Isotop modelliert. Es lässt sich sogar das Knacken eines Zählgeräts simulieren, wenn ein vom Kern ausgesendetes γ-Quant registriert wird

```
# rad1.py

from soundsystem import *
import random
import time

def decay():
    global N
    for i in range(N0):
        if z[i] == 1:
            if random.random() < p * dt:
                z[i] = 0
                play()
    N = sum(z)

openSoundPlayer("wav/click.wav")
k = 0.005     # Decay constant (/s)
N0 = 1000     # Starting number of isotops
N = N0        # Current number of isotopes
z = [1] * N0 # Population
dt = 0.01     # Time interval for population check (s)

while True:
    currentTime = time.clock()
    decay()
    while time.clock() - currentTime < dt:
        pass
```

Ausführen mit Webstart

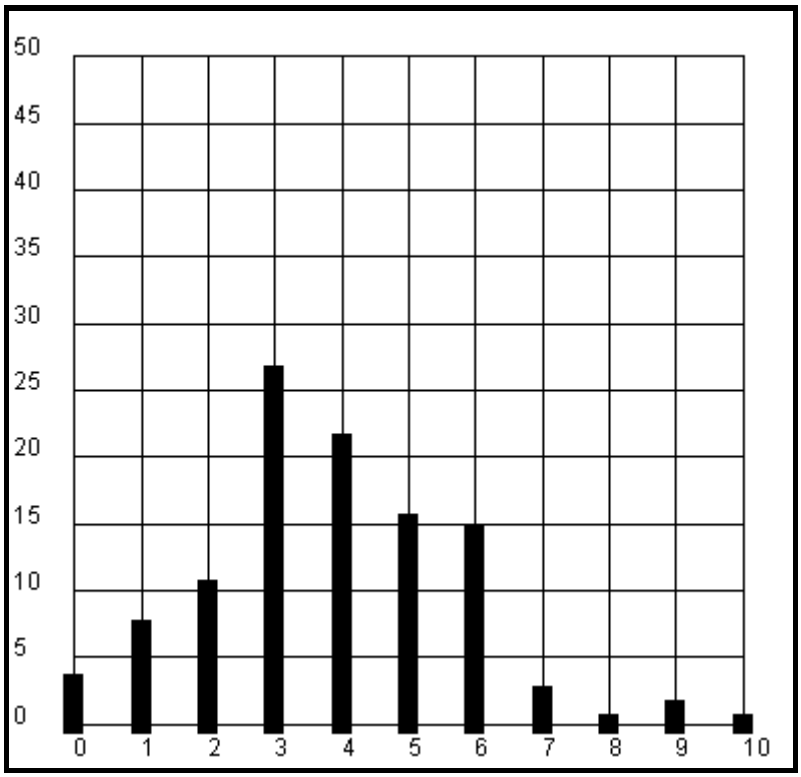
Man hört das typische unregelmässige Knacken des radioaktiven Strahlung.

2.3.2 Statistik des radioaktiven Zerfalls

In einer typischen experimentellen Anordnung wird mit einem elektronischen Zähler gezählt, wieviele Nuklide in einer festen Messzeit, beispielsweise 1 Sekunde zerfallen. Dabei ist nicht nur der Mittelwert interessant, sondern auch die Häufigkeitsverteilung. In der Simulation wird die Verteilung laufend aufgezeichnet.

```
# rad2.py
```

```
from soundsystem import *
import random
import time
from gpanel import *

def decay():
    for i in range(N0):
        if z[i] == 1:
            if random.random() < k * dt:
                z[i] = 0
                play()

def updateDistribution():
    global N
    decayed = N - sum(z)
    if decayed <= 100:
        h[decayed] += 1
    for i in range(11):
        line(i, 0, i, h[i])
    N = sum(z)

openSoundPlayer("wav/click.wav")
makeGPanel(-1, 11, -5, 55)
drawGrid(0, 10, 0, 50)
lineWidth(10)
title("Number of decays in 1 sec")
p = 0.005      # Decay constant (/s)
N0 = 1000      # Starting number of isotopes
N = N0         # Current number of isotopes
z = [1] * N0   # Population
dt = 0.01      # Time interval for population check (s)
t = 0          # Current time
tSec = 0       # Current seconds
h = [0] * 101 # Decay distribution

while max(h) < 50:
    currentTime = time.clock()
    decay()
    tSecNew = int(t)
    if tSecNew != tSec: # every second
        updateDistribution()
        tSec = tSecNew
    while time.clock() - currentTime < dt:
        pass
    t += dt
```



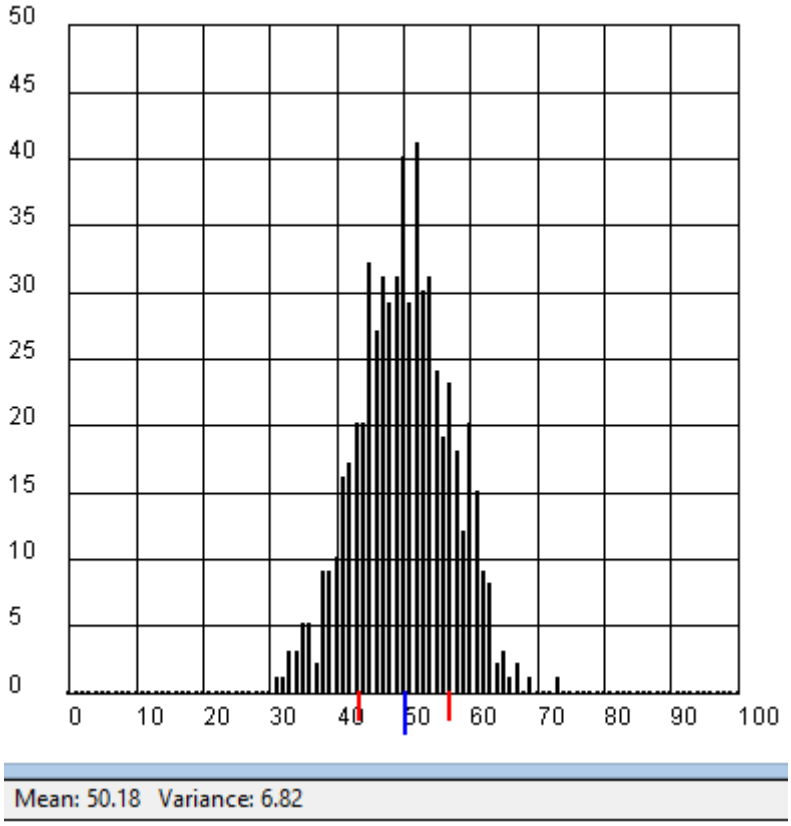
Ausführen mit Webstart

Da die Population hier klein ist, spielt es eine grosse Rolle, dass die Zahl der Individuen im Lauf der Zeit abnimmt.

Es zeigt sich zwar eine glockenförmige Verteilung, die allerdings keiner bekannten Verteilung aus der Statistik entspricht, da die Zahl der Nuklide mit der Zeit abnimmt. Anders ist es, wenn man von einer grossen Zahl von Radionukliden mit kleiner Zerfallswahrscheinlichkeit ausgeht. In diesem Fall ergibt sich bekanntlich eine Poisson-Verteilung.

```
# rad3.py

import random
from gpanel import *

def decay():
    decayed = 0
    for i in range(N0):
        if random.random() < k * dt:
            decayed += 1
    return min(100, decayed)

def updateDistribution(decayed):
    h[decayed] += 1
    for i in range(101):
        line(i, 0, i, h[i])

def getMean():
    total = 0
    for i in range(101):
        total += h[i] * i
    return total / sum(h)

def getVariance(m):
```

```
    u = sum(h)
    total = 0
    k = int(m)
    while True:
        total += h[k]
        k += 1
        if total > 0.34 * u:
            break
    return k - m

makeGPanel(-10, 110, -5, 55)
drawGrid(0, 100, 0, 50)
lineWidth(2)
addStatusBar(20)
setStatusText("Running...")
title("Number of decays in 0.1 sec")
k = 0.05      # Decay constant (/s)
N0 = 10000    # Number of isotopes
dt = 0.1      # Time interval for population check (s)
t = 0         # Current time
h = [0] * 101 # Decay distribution

while t < 60:
    decayed = decay()
    updateDistribution(decayed)
    t += dt

m = getMean()
s = getVariance(m)
setColor("blue")
line(m, -3, m, 0)
setColor("red")
line(m - s, -2, m - s, 0)
line(m + s, -2, m + s, 0)
setStatusText("Mean: %0.2f" % m + "   Variance: %0.2f" % s)
```



Ausführen mit Webstart

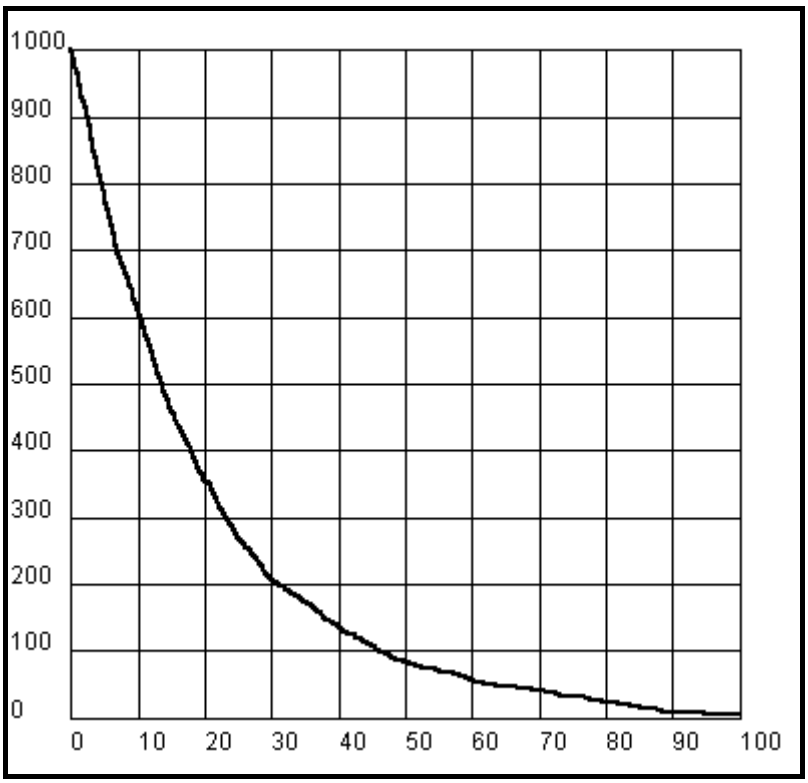
Der theoretische Mittelwert beträgt $m = N_0 * \lambda * \Delta t$ und die Standardabweichung $s = \sqrt{m}$.

2.3.3 Zeitlicher Verlauf der Zahl radioaktiver Nuklide

Im nächsten Computerexperiment wird der Verlauf der Zahl der Nuklide im Laufe der Zeit untersucht und grafisch dargestellt. Es zeigt sich innerhalb der statistischen Schwankungen ein typischer exponentieller Abfall.

```
# rad4.py

from soundsystem import *
from gpanel import *
import random
import time

def decay():
    global N
    for i in range(N0):
        if z[i] == 1:
            if random.random() < k * dt:
                z[i] = 0
                play()
    N = sum(z)

openSoundPlayer("wav/click.wav")
makeGPanel(-10, 110, -100, 1100)
drawGrid(0, 100, 0, 1000)
title("Radioaktiver Zerfall (N versus t)")
```

```
lineWidth(2)
k = 0.05      # Decay constant (/s)
N0 = 1000     # Starting number of isotops
z = [1] * N0 # Population
dt = 0.01     # Time interval for population check (s)
t = 0         # Current time
move(0, N0)
while t <= 100:
    currentTime = time.clock()
    decay()
    draw(t, N)
    while time.clock() - currentTime < dt:
        pass
    t += dt
title("All done")
```



Ausführen mit Webstart

2.3.4 Radioaktives Zerfallsgesetz

Bei der mathematische Behandlung des radioaktiven Zerfalls betrachtet man den zeitlichen Mittelwert und schreibt für die Abnahme dN der Zahl der Nuklide im infinitesimalen Zeitintervall dt:

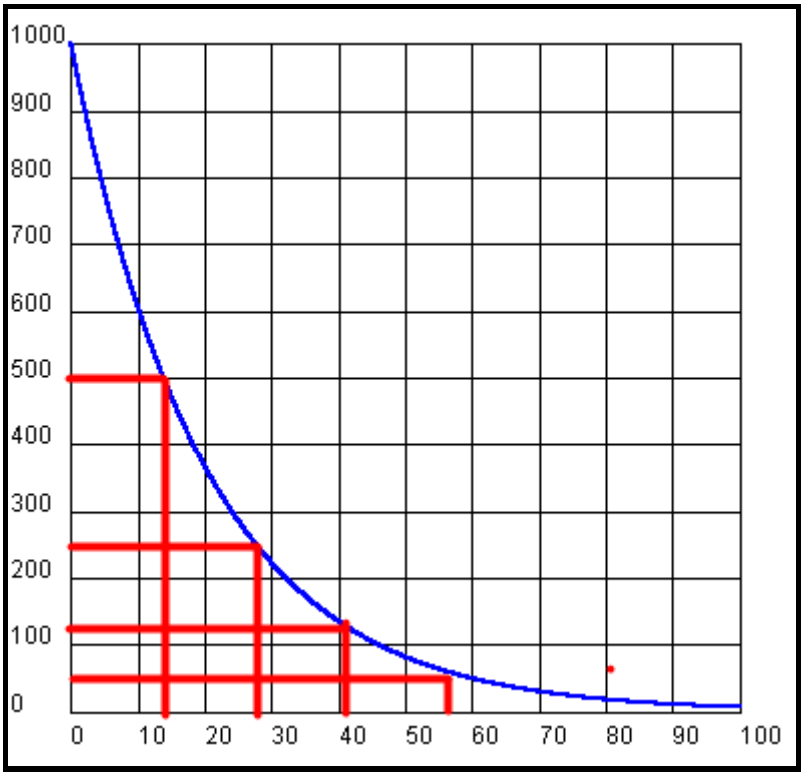
$$dN = -N * \lambda * dt$$

Statt die daraus folgende Differentialgleichung

$$\frac{dN}{dt} = -N * \lambda$$

zu lösen, eine Computeriteration ausgeführt. Aus der Grafik erkennt man die Eigenschaft, dass immer nach der Halbwertszeit $T_{1/2} = \ln(2) / \lambda = 0.693 / \lambda = 13.86$ s die Zahl der Nuklide auf die Hälfte abgefallen ist.

```
# rad5.py

from gpanel import *

k = 0.05      # Decay constant (/s)
N0 = 1000     # Starting number of isotops
N = N0        # Current number of isotopes
dt = 0.01     # Time interval for population check (s)
t = 0         # Current time

makeGPanel(-10, 110, -100, 1100)
drawGrid(0, 100, 0, 1000)
title("Radioaktiver Zerfall (N versus t)")
setColor("blue")
lineWidth(2)
move(0, N)
while t <= 100:
    dN = -N * k * dt
    N = N + dN
    draw(t, N)
    t += dt
title("All done")
```



Ausführen mit Webstart

Zeichnet man zusätzlich den Funktionsgraph von

$$N = N_o * e^{-\lambda t}$$ (Radioaktives Zerfallsgesetz)

ein, so ergibt sich eine gute Übereinstimmung.

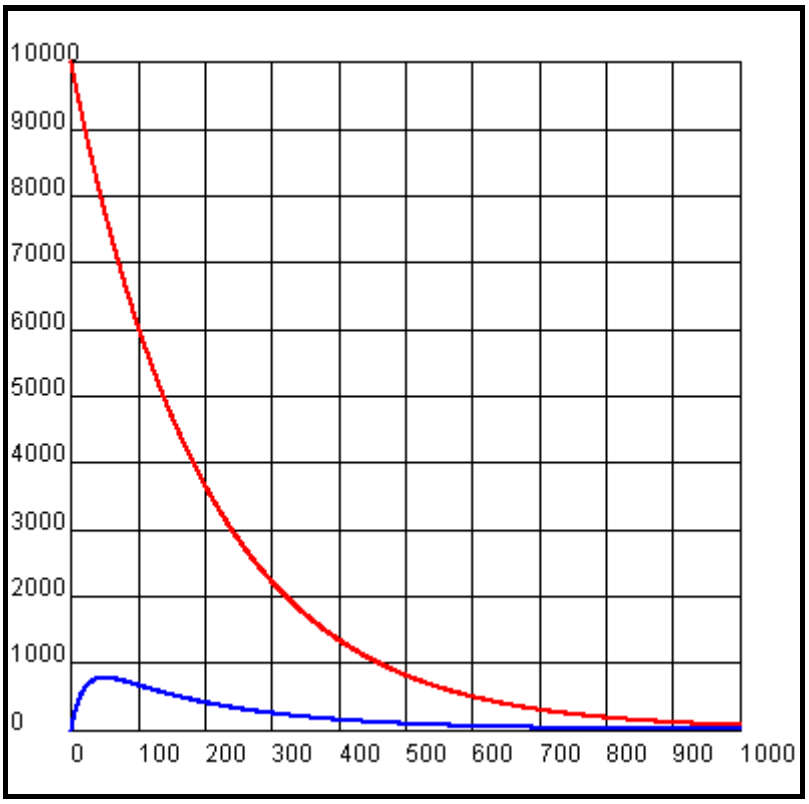
2.3.4 Das Mutter-Tochter-Problem

Beim klassischen Mutter-Tochter-Problem geht man davon aus, dass ein erstes Radionuklid (Mutter) mit der Zerfallskonstanten λ_1 zerfällt, aber das Zerfallsprodukt (Tochter), deren Nuklidzahl vorerst null ist, wiederum radioaktiv ist und mit der Zerfallskonstanten λ_2 zerfällt. Man untersucht den Verlauf des Mutter- und Tochterisotops. Im (infinitesimal) kleinen Zeitschritt dt gilt:

$$dN_1 = -\lambda_1 * \mathrm{N}_1 * dt \text{ und } \quad dN_2 = \lambda_1 * \mathrm{N}_1 * dt - \lambda_2 * \mathrm{N}_2 * dt$$

Die daraus folgenden Differentialgleichungen sind für die Schule zu kompliziert, die Simulation ist aber nur eine kleine Erweiterung des vorhergehenden Problems.

```
# rad6.py

from gpanel import *

k1 = 0.005    # Decay constant mother (/s)
N01 = 1000    # Starting number of mother isotops
N1 = N01      # Current number of mother isotopes
k2 = 0.05     # Decay constant daughter (/s)
N02 = 0       # Starting number of daughter isotops
N2 = N02      # Current number of daughter isotopes
dt = 0.01     # Time interval for population check (s)
t = 0         # Current time

makeGPanel(-100, 1100, -100, 1100)
drawGrid(0, 1000, 0, 1000)
title("Mutter-Tochter-Problem (N versus t)")
lineWidth(2)

while t <= 1000:
    N1New = N1 - N1 * k1 * dt
    N2New = N2 + N1 * k1 * dt - N2 * k2 * dt
    setColor("blue")
    line(t, N1, t, N1New)
    setColor("red")
    line(t, N2, t, N2New)
    N1 = N1New
    N2 = N2New
    t += dt
title("All done")
```



Ausführen mit Webstart

2.4 Verdunstungskälte

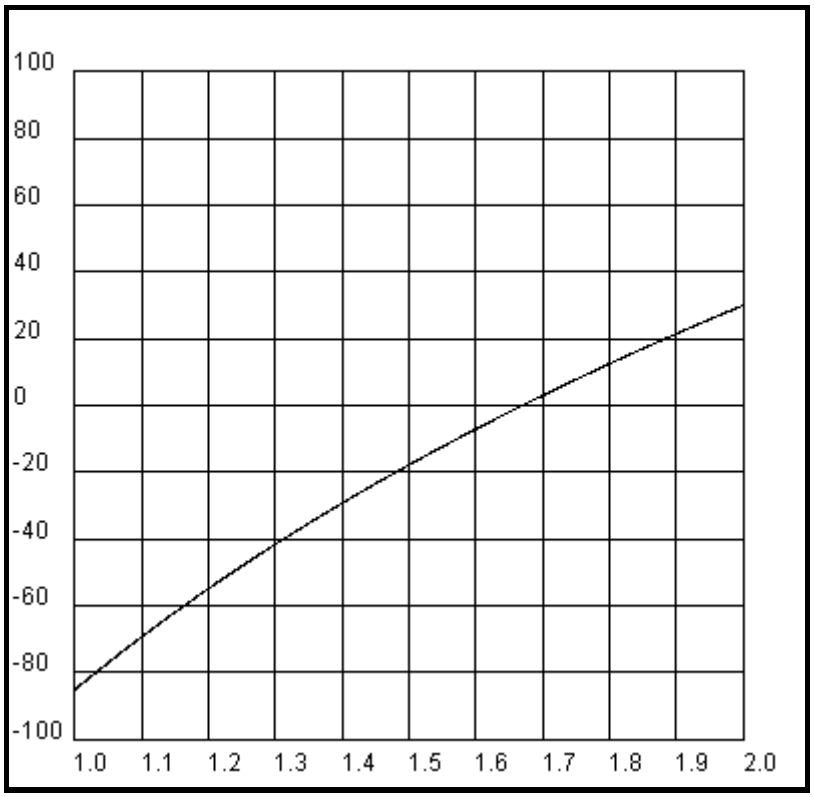
Der früher zur Narkose eingesetzte Äther (Diethylether) ist farblos und besitzt einen süsslichen Geruch. Bei Zimmertemperatur ist er flüssig (Siedetemperatur bei Normaldruck 35 °C). Er dient im Physikunterricht zur Demonstration der Verdunstungskälte. Giesst man ein paar Tropfen auf die Handfläche, so spürt man eine deutliche Abkühlung. Für die quantitative Behandlung geht man davon aus, dass bei der Verdunstung der Masse dm der Flüssigkeit die Verdampfungswärme dQ = L_v.dm entzogen wird und sich darum die Temperatur gemäss der Wärmekapazität dQ = c m dT verringert. Es gilt daher

$L_v * dm = c * m * dT$ (L_v: spez. Verdampfungwärme, c: spez. Wärmekapazität)

In einem isolierenden Behälter mit vernachlässigbarer Wärmekapazität befinden sich 2 kg Aether. Wir simulieren die Abnahme der Temperatur bis die Hälfte davon verdunstet ist (L_v und c werden als konstant angenommen).

```
# aether.py

from gpanel import *

Lv = 3.84E5     # Verdampfungswaerme von Aether in J/kg
c  = 2.31E3     # Waermekapazitaet von Aether in J/kg/K

m0 = 2.0      # Anfangsmasse in kg
m1 = 1.0      # Endmasse in kg
dm = 0.001    # Massenschritt in kg
m  = m0       # Aktuelle Masse
```

```
T0 = 30     # Anfangstemperatur in Grad Celsius
T  = T0     # Aktuelle Temperatur in Grad Celsius

makeGPanel(0.9, 2.1, -120, 120)
drawGrid(1.0, 2.0, -100, 100)
title("Verdampfung von Aether (T versus m)")

move(m0, T0)
while m > m1:
    draw(m, T)
    dT = Lv * dm / c / m
    m -= dm
    T -= dT

print "Endtemperatur T = ", T, "°C"
```



Ausführen mit Webstart

2.5 Wechselstromlehre

2.5.1 Impedanzen

Elektrische Schaltungen für sinusförmige Wechselspannungen und Wechselströmen, die aus passiven Bauelementen (Widerständen, Kondensatoren, Spulen) aufgebaut sind, können wie Gleichstromschaltungen behandelt werden, wenn man für Spannungen, Ströme und Widerstände komplexe Grössen verwendet. Ein allgemeiner komplexer Widerstand heisst auch **Impedanz** und wird oft mit Z und für rein imaginäre Widerstände mit X bezeichnet. Die Impedanz eines ohmschen Widerstands ist R, einer Spule $X_L = j\omega L$ (L: Induktivität) und eines Kondensators $X_C = 1 / j\omega C$ (C: Kapazität), wobei $\omega = 2\pi f$ (f: Frequenz) ist.

Eine komplexe Wechselspannung u = u(t) läuft in der Gaussschen Zahlenebene gleichförmig auf einem Kreis. Wird sie an eine Impedanz Z angelegt, so fliesst der Strom i(t) und nach dem Ohmschen Gesetz gilt u = Z * i. Da bei der Multiplikation von komplexen Zahlen die Phasen addiert und die Beträgt multipliziert werden, läuft u um die Phase von Z phasenverschoben vor i (bei positiver Phase von Z):

phase(u) = phase(Z) + phase(i)

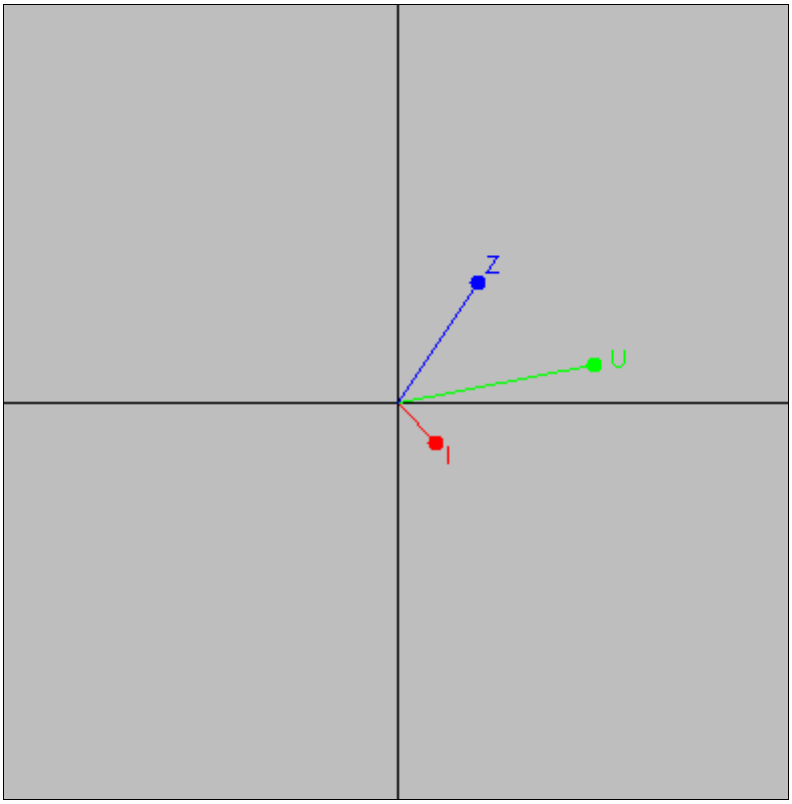
Also läuft i auch auf einem Kreis. Für die Beträge (Amplituden) gilt:

$| u | = | Z | * | i |$

Diese Beziehung wird in der Gaussschen Zahlenebene für die Werte | u | = 5V, Z = 2 + 3j und einer Frequenz von f = 10 Hz animiert dargestellt.

```
# imp1.py

from gpanel import *
import math

def drawAxis():
   line(min, 0, max, 0)   # Real axis
   line(0, min, 0, max) # Imaginary axis


def cdraw(z, color, label):
    oldColor = setColor(color)
    line(0j, z)
    fillCircle(0.2)
    z1 = z + 0.5 * z / abs(z) - (0.1 + 0.2j)
    text(z1, label)
    setColor(oldColor)

min = -10
max = 10
dt = 0.001

makeGPanel(min, max, min, max)
enableRepaint(False)
bgColor("gray")
title("Komplexe Spannungen und Ströme")

f = 10 # Frequency
```

```
omega = 2 * math.pi * f

t = 0
uA = 5
Z = 2 + 3j

while True:
    u = uA * (math.cos(omega * t) + 1j * math.sin(omega * t))
    i = u / Z
    clear()
    drawAxis()
    cdraw(u, "green", "U")
    cdraw(i, "red", "I")
    cdraw(Z, "blue", "Z")
    repaint()
    t += dt
    delay(100)
```



Ausführen mit Webstart

Elektrische Schaltungen mit Widerständen, Kondensatoren und Spulen können wie Gleichstromschaltungen behandelt werden, falls man Spannung, Strom und Widerstand als komplexe Zahlen (Impedanzen) auffasst. Dabei gilt (mit $\omega = 2\pi f$, f: Frequenz):

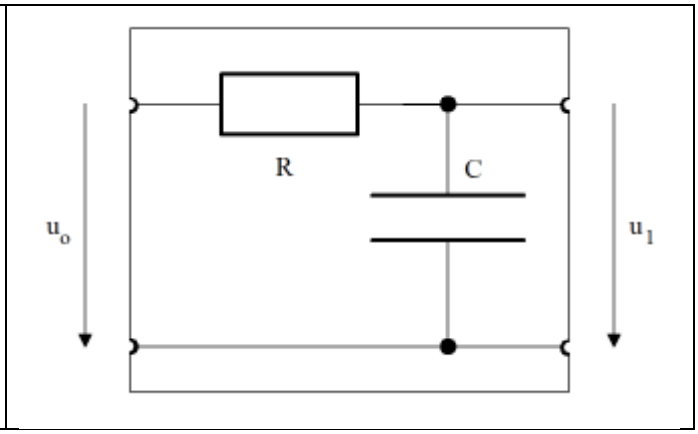
Bauelement	**Grösse**	**Impedanz**
Widerstand	R (Ohmscher Widerstand)	R
Kondensator	C (Kapazität)	$j/\omega C$
Spule	L (Induktivität)	$j\,\omega L$

2.5.2 Tiefpass-Filter

An ein RC-Glied legt man die Eingangswechselspannung u_o an. Wie gross ist die Ausgangspannung u_1?

Für die Serieschaltung von R und C ergibt sich die Impedanz Z = R + X_C und damit der Strom i = u_o / Z, also wiederum mit dem Ohmschen Gesetz die Ausgangspannung

$$u_1 = X_C * i = \frac{X_C}{R + X_C} * u_o$$



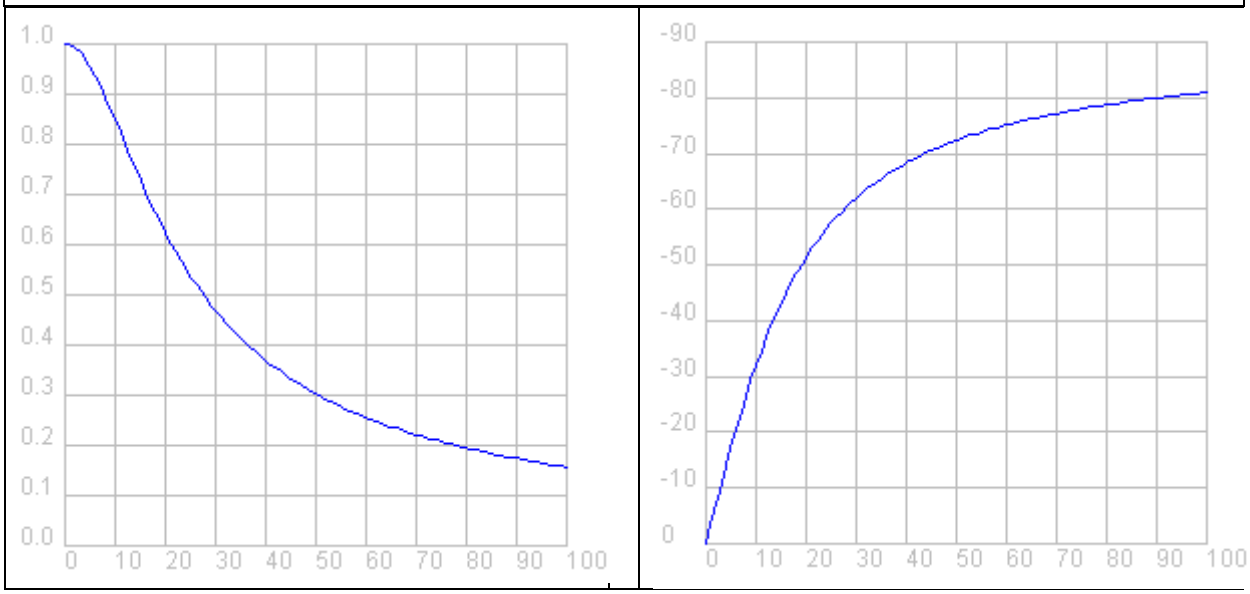
oder

$$u_1 = v * u_o \qquad \text{wo } v = \frac{X_C}{R + X_C} \qquad \text{mit } X_C = \frac{j}{\omega C}$$

Im Bode-Plot wird vom komplexen Verstärkungsfaktor v Betrag und Phase als Funktion der Frequenz aufgetragen.

```
# imp2.py

from gpanel import *
import math
import cmath

R = 10
C = 0.001

def v(f):
    if f == 0:
        return 1 + 0j
    omega = 2 * math.pi * f
    XC = 1 / (1j * omega * C)
    return XC / (R + XC)

p1 = GPanel(-10, 110, -0.1, 1.1)
drawPanelGrid(p1, 0, 100, 0, 1.0, "gray")
p1.title("Bode Plot - Low Pass, Gain")
p1.setColor("blue")
f = 0
while f <= 100:
    if f == 0:
        p1.move(f, abs(v(f)))
    else:
        p1.draw(f, abs(v(f)))
    f += 1

p2 = GPanel(-10, 110, 9, -99)
drawPanelGrid(p2, 0, 100, 0, -90, 10, 9, "gray")
p2.title("Bode Plot - Low Pass, Phase")
p2.setColor("blue")
f = 0
while f <= 100:
    if f == 0:
        p2.move(f, math.degrees(cmath.phase(v(f))))
```

```
    else:
        p2.draw(f, math.degrees(cmath.phase(v(f))))
    f += 1
```



Ausführen mit Webstart

Analog können Hochpass- und Bandpass-Filter untersucht werden.

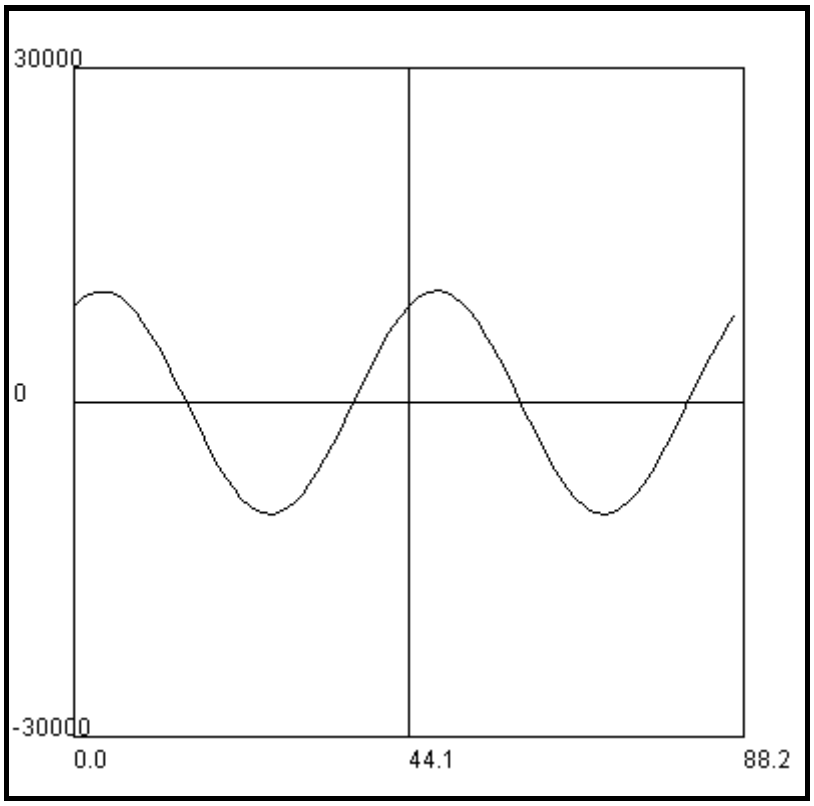
2.6 Akustik

2.6.1 Überlagerung von Sinustönen, Schwebung

Der Computer kann als vielseitiger Audiogenerator eingesetzt werden. Damit kann man sich nicht nur die Anschaffung von Signalgeneratoren ersparen. Vielmehr lassen sich insbesondere Überlagerungsexperimente ausführen, die mit mehreren einzelnen Geräten nicht ausführbar sind, da diese nicht phasenstarr gekoppelt werden können. In TigerJython ist es nach dem Import des Moduls *soundsystem* sehr einfach, eine digitalen Audiostream auf dem linken und rechten Kanal gleichartig (mono) oder unterschiedlich (stereo) abzuspielen. Für einen monauralen Sound erstellt man dazu eine Liste mit den Abtastwerten des Sounds als 16 bit signed integers, also zwischen -32768 und 32767 und übergibt diese mit *openMonoPlayer()* einem SoundPlayer-Objekt. Mit *play()* wird der Sound über die Soundkarte abgespielt. Für einen binauralen Sound besteht die Liste abwechslungsweise aus dem Abtastwert für den linken und rechten Kanal und man verwendet *openStereoPlayer()*. Das Programm spielt einen Sinuston mit der Frequenz 500 Hz ab. Um es leicht zu erweitern, wird es mit den drei kommentierten Funktionen *sine()*, *createMonoSound()* und *showTimeSlice()* modularisiert. Die drei Funktionen werden in einer Datei *soundlib.py* abgespeichert, damit sie für alle weiteren Programme zur Verfügung stehen.

```
# sound1.py

from soundsystem import *
from gpanel import *


def sine(t, A, f, phi):
    ''' Sine wave
```

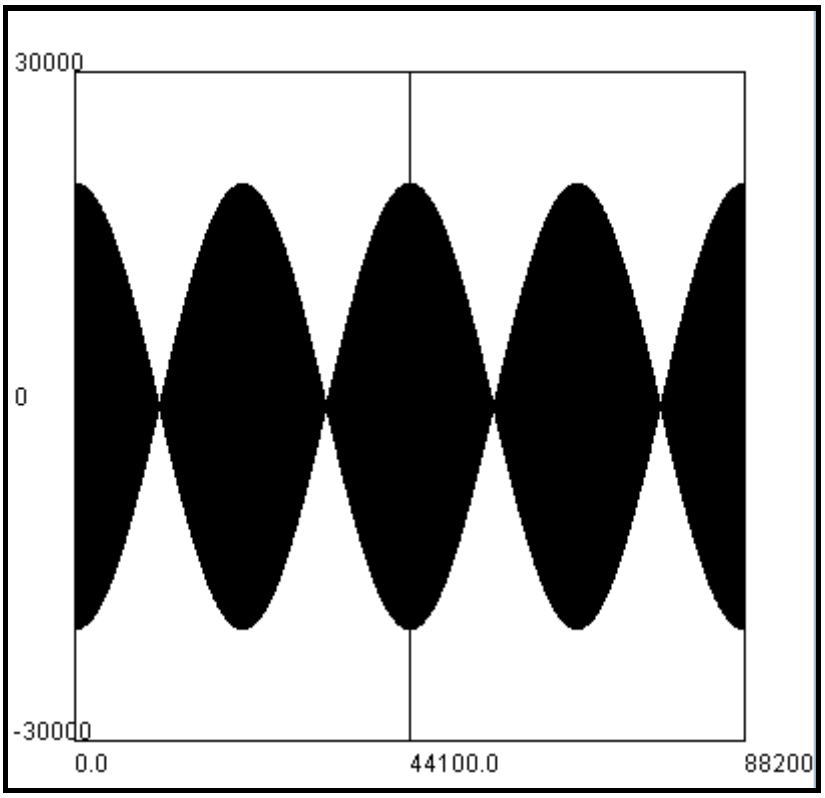
```
      t: current time (s)
      A: Amplitude (-33000..32000)
      f: frequency (Hz)
      phi: phase (degrees)
    '''
    y = A * math.sin(2 * math.pi * f * t + math.radians(phi))
    return y

def createMonoSound(g, A, f, T, fs, p):
    '''
    Returns a sound sample list:
     g: sound function g(t, A, f, p)
     A: amplitude (each sample within -32000 and 32000)
     f: fundamental frequency (Hz)
     T: duration (s)
     p: phase for each component (within 0..2pi)
    '''
    t = 0
    dt = 1.0 / fs
    nbFrames = int(T * fs)
    data = []
    for i in range(nbFrames):
        sample = int(g(t, A, f, p))
        data.append(sample)
        t += dt
    return data

def showMonoSlice(data, nbPeriods, f, fs):
    ''' Displays time trace of a mono signal
      data: sound sample list
      nbPeriods: number of periods to show
      f: signal base frequency (Hz)
      fs: sampling rate (Hz)
    '''
    makeGPanel()
    title("Signal vs Time")
    nbSamples = nbPeriods / f * fs
    window(-0.1 * nbSamples, 1.1 * nbSamples, -36000, 36000)
    drawGrid(0, nbSamples, -30000, 30000, 2, 2)
    for i in range(nbSamples):
        if i == 0:
            move(0, data[0])
        else:
            draw(i, data[i])

samplingRate = 22050 # Hz
duration = 10  # s
amplitude = 10000 # max 32000
frequency = 500 # Hz
makeGPanel()
title("Creating sound. Please wait...")
data = createMonoSound(sine, amplitude, frequency,
                       duration, samplingRate, 60)
openMonoPlayer(data, sampleRate)
play()
showTimeSlice(data, 2, frequency, samplingRate)
```



Ausführen mit Webstart

Die Überlagerung von zwei Sinusschwingungen mit fast gleicher Frequenz ergibt eine Schwebung mit einer An-und Abschwellperiode die gleich der Frequenzdifferenz df = 1 Hz ist.

```
# sound2.py

from soundsystem import *
from gpanel import *
from soundlib import *

def tone(t, A, f, p):
    y = sine(t, A, f, 0) + sine(t, A, f + df, 0)
    return y

samplingRate = 22050 # Hz
duration = 10  # s
amplitude = 10000 # max 32000
frequency = 500 # Hz
df = 1

makeGPanel()
title("Creating sound. Please wait...")
data = createMonoSound(tone, amplitude, frequency,
                       duration, samplingRate, 60)
openMonoPlayer(data, sampleRate)
play()
showMonoSlice(data, 2000, frequency, samplingRate)
```



Ausführen mit Webstart

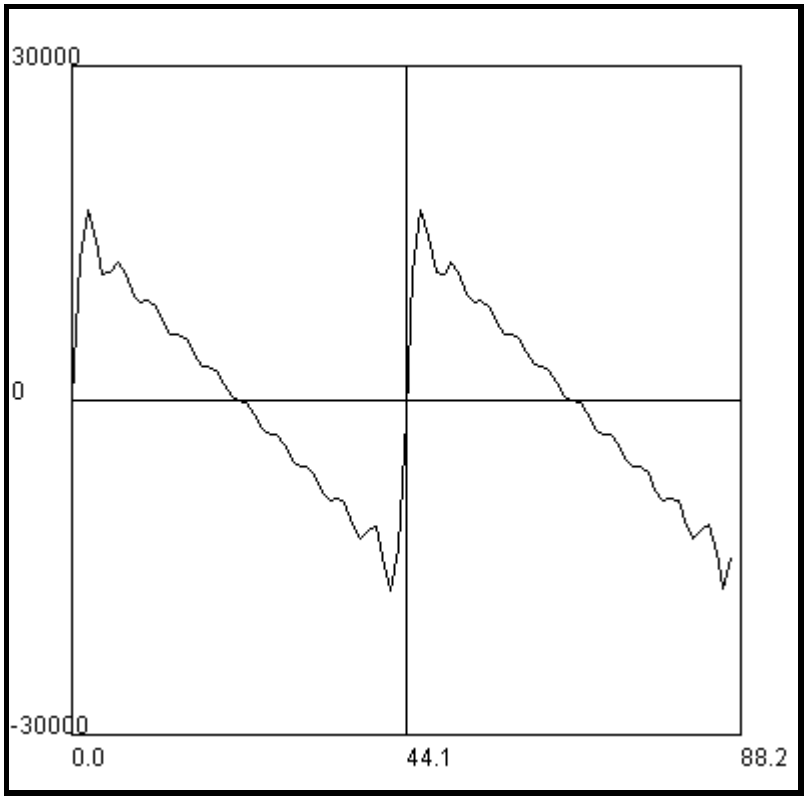
2.6.2 Grund- und Obertöne

2.6.2.1 Synthese von Klängen

Ein Klang ist ein periodisches Signal. Man kann dieses in einen sinusförmigen Grundton und sinusförmige Obertöne, die ein Vielfaches der Grundtonfrequenz haben, zerlegen (Fourierreihe) oder auch durch eine Überlagerung von Grund- und Obertönen synthetisieren. Hier wird der Sägezahn approximativ durch seinen Grundton und 9 Obertöne mit dem Amplituden 1 / n erzeugt.

```
# sound3.py

from soundsystem import *
from gpanel import *
from soundlib import *

def sound(t, A, f, p):
    y = 0
    for i in range(1, 11):
        y += sine(t, A / i, f *  i, 0)
    return y

samplingRate = 22050 # Hz
duration = 10  # s
amplitude = 10000 # max 32000
frequency = 500 # Hz

makeGPanel()
title("Creating sound. Please wait...")
data = createMonoSound(sound, amplitude, frequency,
                       duration, samplingRate, 0)
```

```
openMonoPlayer(data, sampleRate)
play()
showMonoSlice(data, 2, frequency, samplingRate)
```



Ausführen mit Webstart

2.6.2.2 Hörbarkeit von Phasen

Bereits seit den Untersuchungen durch H. Helmholtz ist bekannt, dass das menschliche Gehör für periodische Signale wie ein Spektrumanalyser wirkt, dass also die Amplituden von Grund- und Obertönen den Klangcharakter bestimmen, hingegen die Phasen der Obertöne keine Rolle spielt.

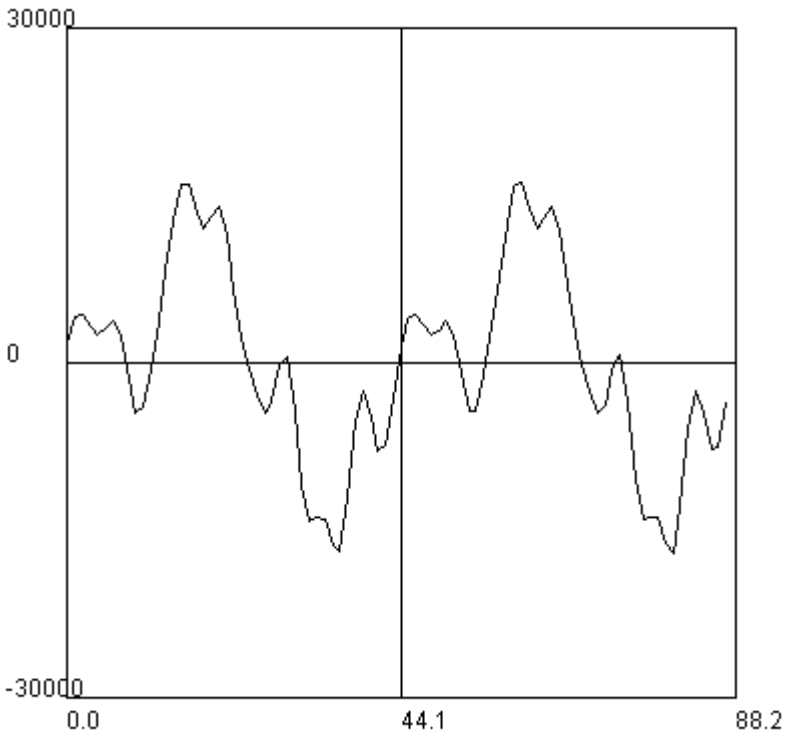
Seine vielzitierte Aussage lautet:

"Wir können demnach das wichtige Gesetz aufstellen, dass die Unterschiede der musikalischen Klangfarbe nur abhängen von der Anwesenheit und Stärke der Partialtöne, nicht von ihren Phasenunterschieden..." (aus H. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen, Vieweg, 1863).

Dies ist sehr erstaunlich, da ja das Zeitsignal wesentlich verändert wird, wenn man die Phasen der Obertöne verschiebt. Im folgenden Programm werden die Phasen der Spektralanteile beim Erzeugen des Sägezahns zufällig im Bereich 0..360 Grad gewählt. Das Zeitsignal sieht damit gar nicht mehr wie ein Sägezahn aus. Trotzdem tönt der Klang genau gleich.

```
# sound4.py

from soundsystem import *
from gpanel import *
from soundlib import *
import random
```

```
def sound(t, A, f, p):
    y = 0
    for i in range(1, 11):
        y += sine(t, A / i, f *  i, phi[i])
    return y

samplingRate = 22050 # Hz
duration = 10  # s
amplitude = 10000 # max 32000
frequency = 500 # Hz

phi = [0] * 11
for i in range(1, 11):
    phi[i] = random.randint(0, 359)

makeGPanel()
title("Creating sound. Please wait...")
data = createMonoSound(sound, amplitude, frequency,
                       duration, samplingRate, 0)
openMonoPlayer(data, sampleRate)
play()
showTimeSlice(data, 2, frequency, samplingRate)
```



Ausführen mit Webstart

Mit der Funktion *saveWave()* können die Sounds auch sehr einfach auf der Festplatte gespeichert werden, damit sie mit irgendeinem Sound-Player abspielbar werden.

```
def saveWave(data, fs, filename):
    openMonoRecorder(fs)
    if writeWavFile(data, filename):
        print filename + " successfully saved"
```

```
    else:
        print "Can't save " + filename
```

2.6.2.3 Stereophones Hören

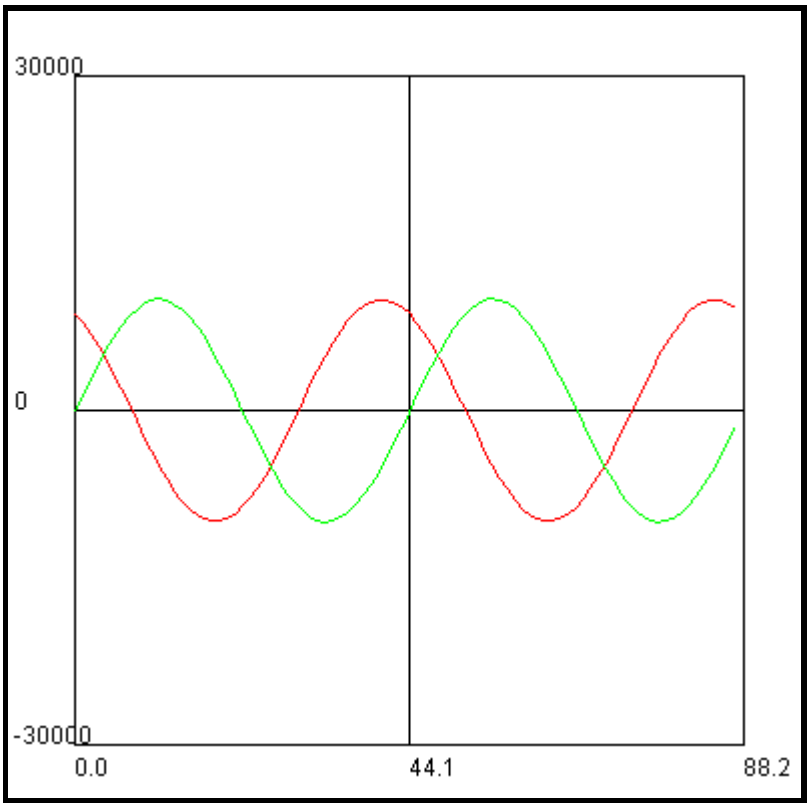
Obschon wir gerade vorhin feststellten, dass das Ohr normalerweise die Phasen der Obertöne nicht hört, kann es die Phaseninformation trotzdem verwerten. Trifft nämlich ein Klang von einer Schallquelle ein, die sich nicht gerade in Blickrichtung befindet, so weisen die Signale, die auf die beiden Ohren auftreffen, eine Phasenverschiebung auf, aus der sich die Richtung zur Quelle bestimmen lässt. Zudem haben sie auch noch unterschiedliche Amplituden. Das Programm erzeugt einen stereophonen Sinusklang, bei dem die Phasen des linken Kanals um 120 Grad verschoben ist. Dies entspricht einem früheren Eintreffen des linken Signals, also einer kleineren Distanz des linken Ohrs zur Schallquelle. In der Tat hört man (vorzugsweise mit einem Kopfhörer bei kleiner Laustärke) die Schallquelle auf der linken Seite.

```
# sound5.py

from soundsystem import *
from gpanel import *
from soundlib import *

samplingRate = 22050 # Hz
duration = 10  # s
frequency = 500 # Hz

leftAmplitude = 10000
leftPhase = 120
rightAmplitude = 10000
rightPhase = 0

makeGPanel()
title("Creating sound. Please wait...")
t = 0
dt = 1.0 / samplingRate
nbFrames = int(duration * samplingRate)
data = createStereoTone(leftAmplitude, rightAmplitude, frequency,
    duration, samplingRate, leftPhase, rightPhase)
title("Time slice (2 periods)")
showStereoSlice(data, 2, frequency, samplingRate)
openStereoPlayer(data, samplingRate)
play()
```

Zur Erzeugung des stereophonen Klangs und zu seiner Darstellung wurden noch die beiden Funktionen *createStereoTone()* und *showStereoSlice()* in *soundlib.py* kopiert.

```
def createStereoTone(lA, rA, f, T, fs, lp, rp):
    '''
    Creates a sound list with given:
     A: amplitude (each sample within -32000 and 32000)
     f: fundamental frequency (Hz)
     T: duration (s)
     pLeft: phase for left sine
     pRight: phase for right sine
    '''
```

```
    t = 0
    dt = 1.0 / fs
    nbFrames = int(T * fs)
    data = []
    for i in range(nbFrames):
        left = int(sine(t, lA, f, lp))
        right = int(sine(t, rA, f, rp))
        data.append(left)
        data.append(right)
        t += dt
    return data

def showStereoSlice(data, nbPeriods, f, fs):
    ''' Displays time trace of a stereo signal
      data: sound sample list
      nbPeriods: number of periods to show
      f: signal base frequency (Hz)
      fs: sampling rate (Hz)
    '''
    makeGPanel()
    title("Signal vs Time")
    nbSamples = nbPeriods / f * fs
    window(-0.1 * nbSamples, 1.1 * nbSamples, -36000, 36000)
    drawGrid(0, nbSamples, -30000, 30000, 2, 2)
    setColor("red")
    for i in range(0, nbSamples):
        if i == 0:
            move(0, data[0])
        else:
            draw(i, data[2 * i])
    setColor("green")
    for i in range(0, nbSamples):
        if i == 0:
            move(0, data[1])
        else:
            draw(i, data[2 * i + 1])
```



Ausführen mit Webstart

2.6.3 Spektralanalyse

2.6.3.1 Fast-Fourier-Transform (FFT)

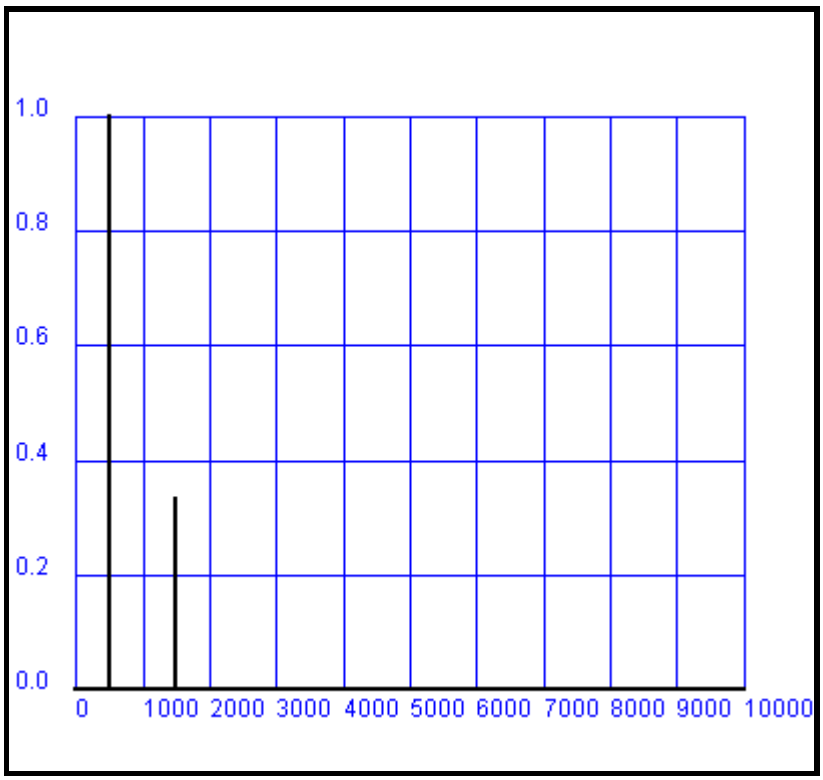
In TigerJython können Soundsignale sehr einfach in ihre Spektralanteile zerlegt werden. Dazu wird der die bekannte Fast Fourier Transform (FFT) verwendet. Man übergibt dazu der Funktion *fft(samples, n)* die Liste mit den (monauralen) Abtastwerten (als 16 bit signed integer) und einen Integer *n*, der als Ordnung der FFT bezeichnet wird (n muss gerade sein). Die Transformation verwendet dann *n* Abtastwerte aus *samples* und gibt *n / 2* Amplitudenwerte des Spektrums mit dem Frequenzabstand r = samplingRate / n zurück. (r nennt man die Auflösung.) Der spektrale Bereich reicht also bis zur maximalen Frequenz fmax = r * n/2 = samplingRate / 2.

Die Funktion *showSpectrum()* wird wiederum in unsere Modulbibliothek *soundlib.py* gefügt, um sie auch folgenden Programmen zugänglich zu machen.

```
def showSpectrum(a, fs, n):
    makeGPanel(-1000, 11000, -0.2, 1.2)
    drawGrid(0, 10000, 0, 1.0, 10, 5, "blue")
    title("Audio Spectrum")
    lineWidth(2)
    r = fs / n # Resolution
    f = 0
    for i in range(n // 2):
        line(f, 0, f, a[i])
        f += r
```

Das Programm analysiert einen Klang mit zwei Sinuskomponenten bei 500 Hz und 1500 Hz.

```
# sound6.py

from soundsystem import *
from gpanel import *
from soundlib import *

def sound(t, A, f, p):
    y = sine(t, A, f, 0) + sine(t, A / 3, 3 * f, 0)
    return y

samplingRate = 20000 # Hz
duration = 1  # s
amplitude = 10000 # max 32000
frequency = 500 # Hz
order = 10000

makeGPanel()
title("Creating sound. Please wait...")
data = createMonoSound(sound, amplitude, frequency,
                       duration, samplingRate, 0)
amp = fft(data, order)
showSpectrum(amp, samplingRate, order)
```

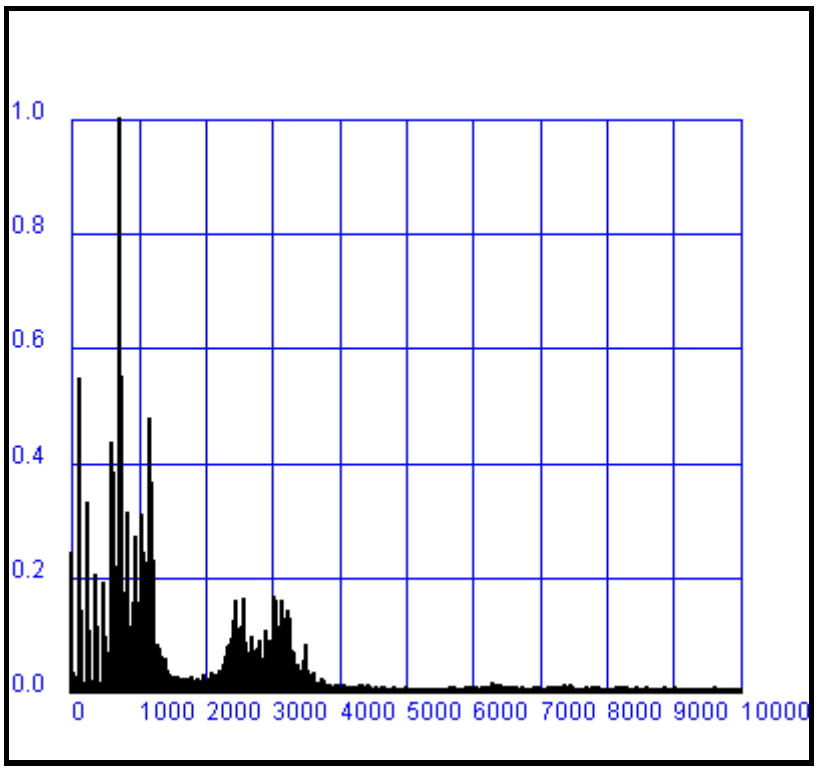


Ausführen mit Webstart

Da in TigerJython auch ein Soundrecorder eingebaut ist, kann man nun leicht Klänge, die mit einem Mikrofon aufgezeichnet werden, spektral analysieren. Beispielsweise der Gesang des Buchstabens 'a'.

```
# sound7.py
```

```
from soundsystem import *
from gpanel import *
from soundlib import *

samplingRate = 20000 # Hz
order = 10000
duration = 1  # s

makeGPanel()
title("Recording...")
openMonoRecorder(samplingRate)
capture()
delay(1000 * duration)
stopCapture()
data = getCapturedSound()
amp = fft(data, order)
showSpectrum(amp, samplingRate, order)
```



Ausführen mit Webstart

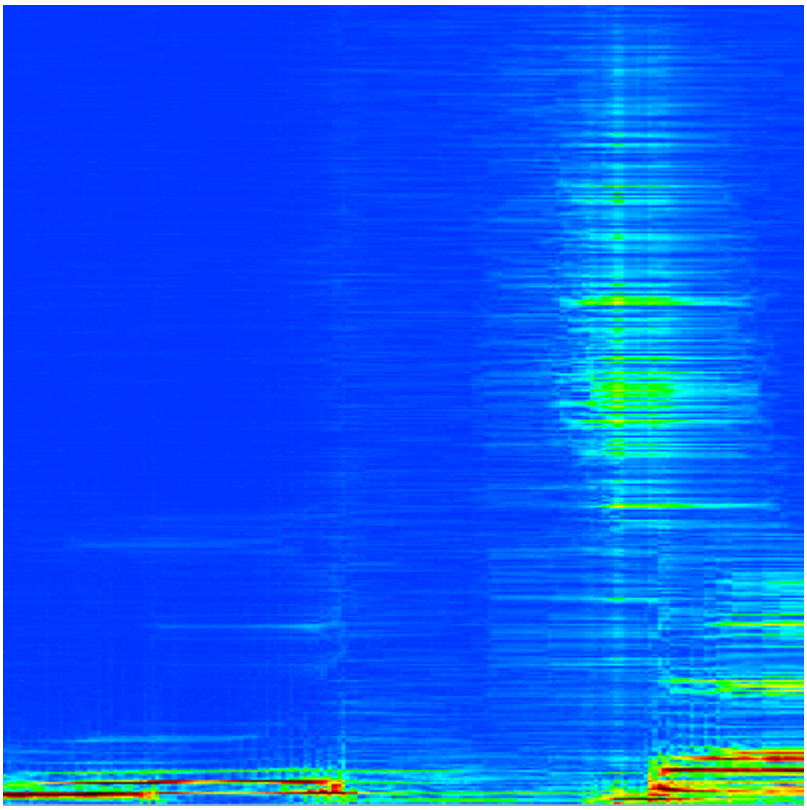
Gut sichtbar sind die hohen Spektralanteil im Bereich von 2 - 3 kHz. Es handelt sich um die *Formaten* der menschlichen Stimme, die wesentlich für ihre Verständlichkeit verantwortlich sind. Einmal mehr wird auf die extreme Einfachheit des Programms hingewiesen.

2.6.3.2 Sonogramm

Die FFT ist auch geeignet, Kurzzeitspektren aufzunehmen. Dabei wird das ganze Soundsignal in einzelne überlappende Blöcke mit kurzer Dauer zerlegt und in jedem Block ein Spektrum berechnet. Dieses kann in einem Sonogramm als Farbwerte aufgetragen werden. Da die Ordnung der FFT der Anzahl Abtastwerte entspricht, welche die FFT benötigt, haben mit n = 2000 und einer Abtastrate von 20000 Hz die

Blöcke eine Länge von 0.1 s. Sie werden überlappend im Abstand von 50 Samples analysiert.
Der Sound wird während 5 s über das Mikrofon aufgenommen. Die Analyse wird aber erst gestartet, wenn der Soundpegel einen bestimmten Wert übersteigt (Triggerung). Für die Umsetzung der Amplituden in eine Farbe, kann auf die Methode *wavelengthToColor()* zurückgegriffen werden, es lässt sich aber auch ein eigenes Farbmapping verwenden.

```
# sound8.py

from soundsystem import *
from gpanel import *
from soundlib import *

def toColor(z):
    w = int(450 +  300 * z)
    c = X11Color.wavelengthToColor(w)
    return c

def drawSonogram(samples, n):
    makeGPanel(0, 190, 0, 1000)
    title("Sonogramm")
    lineWidth(4)
    # Analyse blocks every 50 samples
    for k in range(191):
        a = fft(samples[k * 50:], n)
        for i in range(n / 2):
            setColor(toColor(a[i]))
            point(k, i)

samplingRate = 20000
order = 2000
duration = 5 # s
triggerValue = 10000

makeGPanel()
title("Recording...")
openMonoRecorder(samplingRate)
capture()
delay(1000 * duration)
stopCapture()
data = getCapturedSound()
for i in range(len(data)):
    if data[i] > triggerValue:
        break
if i > 80000:
    title("Recording finished, but no trigger.")
else:
    print "Triggered at:", i / 20000, " s"
    drawSonogram(data[i:], order)
```



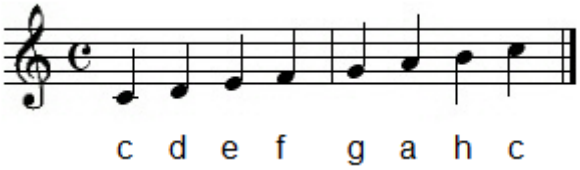
Ausführen mit Webstart

2.6.4 Tonleitern

Die wohltemperierte Tonleiter geht vom Standard-Kammerton mit der Frequenz 440 Hz aus und teilt die Oktave (Frequenzverhältnis 2) in 12 Halbtöne mit dem gleichem Frequenzverhältnis r. Demnach gilt

$$r^{12} = 2 \quad \text{oder} \quad r = \sqrt[12]{2} \approx 1.0594630943$$

Die C-Dur-Tonleiter wie folgt aus:



in Notenschrift

auf der Klaviertastatur

c-d, d-e, f-g, g-h, a-h sind Ganztonschritte (zwei Halbtonschritte), e-f, h-c sind Halbtonschritte. a ist der Kammerton. In der reinen oder natürlichen Tonleiter werden die Tonfrequenzen durch Multiplikation mit einfachen Brüchen aus dem Grundton gebildet. Für die 8 Töne einer Oktave lauten sie:

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2$$

oder als Zahlenreihe 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48. Daraus ergeben sich ausgehend von a = 400 Hz die folgenden Frequenzen der einzelnen Töne:

Ton	wohltemperiert	natürlich
c	a / r^9	3/5 * a
d	a / r^7	3/5 * a * 9/8
e	a / r^5	3/5 * a * 5/4
f	a / r^4	3/5 * a * 4/3
g	a / r^2	3/5 * a * 3/2
a	a	a *
h	$a * r^2$	3/5 * a * 15/8
c	$a * r^3$	3/5 * a * 2

Um sie abzuspielen, kann man die Frequenzen in einer Liste speichern und diese *playTone()* übergeben. Zuerst werden die beiden Tonleitern einzeln abgespielt und man hört keinen Unterschied. Spielt man hingegen die Tonleitern gemeinsam, so tönt es wegen der auftretenden Schwebungen schrecklich.

```
r = 2**(1/12)
a = 440

scale_temp = [a / r**9, a / r**7, a / r**5, a / r**4, a / r**2,
              a, a * r**2, a * r**3]
scale_pure = [3/5 * a, 3/5 * a * 9/8, 3/5 * a * 5/4,  3/5 * a * 4/3,  3/5 *
a * 3/2,
              a, 3/5 * a * 15/8, 3/5 * a * 2]

playTone(scale_temp, 1000)
playTone(scale_pure, 1000)

playTone(scale_temp, 1000, block = False)
playTone(scale_pure, 1000)
```

Ausführen mit Webstart

Referenzen:
Hans Bebie: Signalanalyse in der Akustik
Aegidius Plüss, Overtone

2.7 Optik

(in Bearbeitung)

2.7.1 Brechungsgesetz

2.7.2 Strahlengang im Prisma

2.7.3 Interferenz

2.8 Gassimulation, Entropie

(in Bearbeitung)

2.9 Quantenphänomene

2.9.1 Energieniveaux, Boltzmann-Verteilung

Atomare Partikel besitzen gemäss der Quantentheorie üblicherweise ein diskretes Energiespektrum. Es ist von fundamentaler Bedeutung, dass ein System mit wechselwirkenden Partikeln, die ein nach unten begrenztes diskretes Energiespektrum haben, eine exponentielle Energieverteilung h aufweist. Es gilt die Boltzmann-Verteilung

$$h(\mathrm{E}) = \mathrm{A} * \mathrm{e}^{-\beta E}$$

Aus $\beta = \frac{1}{kT}$ ergibt sich die statistische Definition der absoluten Temperatur T.

In der einfachen, aber durchaus realistischen Simulation geht man von folgenden Modellannahmen aus:

40 linear angeordnete Teilchen haben ein nach unten begrenztes Energiespektrum mit äquidistanten Energieniveaux mit den Energien 0, 1, 2,...,10. In jedem Zeitschritt wird zufällig ein Teilchen i und mit gleicher Wahrscheinlichkeit sein linker oder sein rechter Nachbar k ausgewählt. (Für das linke Randteilchen i = 0, ist der Nachbar k = 1, für das rechte Randteilchen i = 39 ist der Nachbar k = 38.). Die Paare tauschen die Energie nach folgender Regel aus:

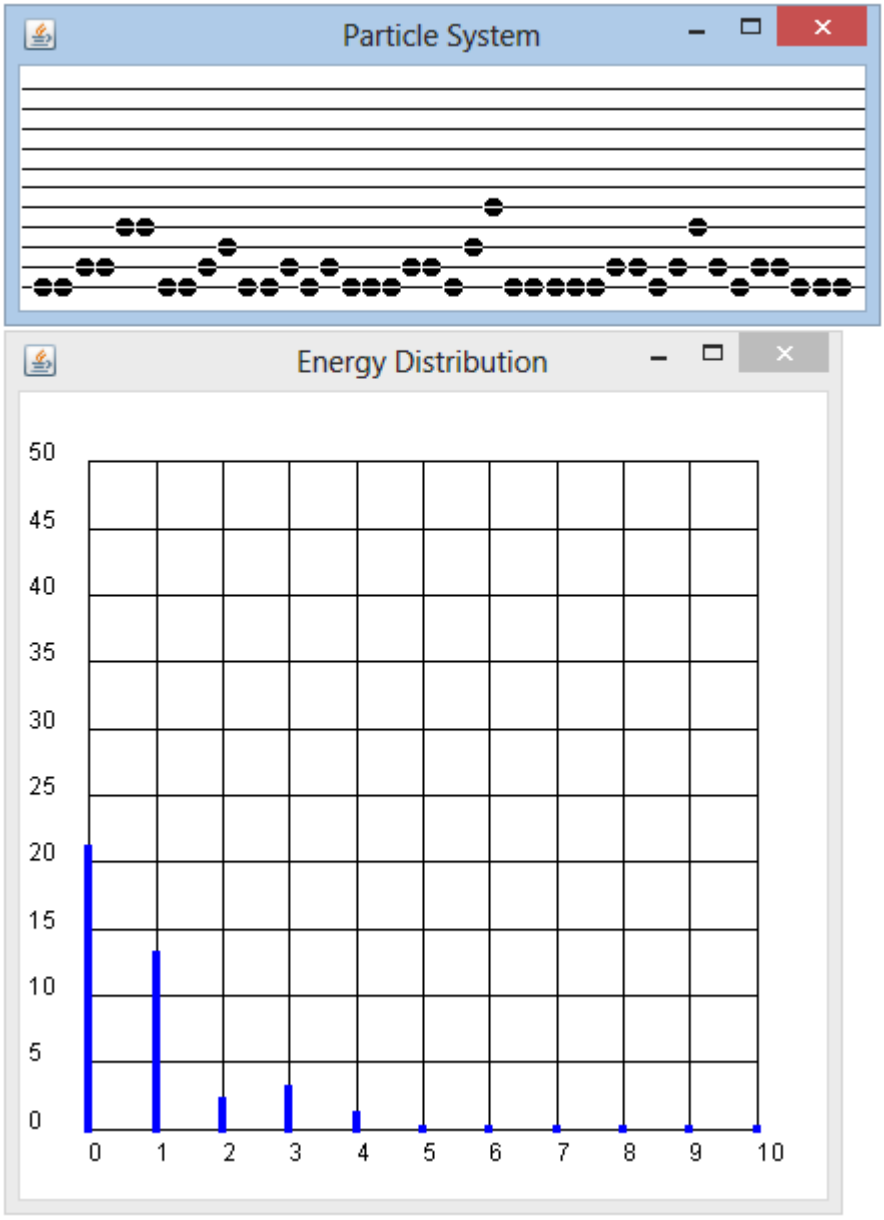
Falls sich das Teilchen i nicht im Grundzustand mit der Energie 0 befindet, so gibt es eine Energieeinheit an seinen Partner k ab, fällt also auf das nächst tiefere Energieniveau zurück. Dafür springt k auf das nächst höhere Energieniveau

Anfangsbedingungen: Zur Zeit t = befinden sich zufällige 30 Teilchen im ersten angeregtem Niveau, alle anderen im Grundzustand.

```
# boltzmann.py
# E0 = 0, dE = 1

from gpanel import *
import random

def initSystem():
    width = (nb + 2) * d
    height = (eMax + 2) * d
    makeGPanel(Size(width, height))
    title("Particle System")
    setXORMode("white")
    window(-1, nb, -1, eMax + 1)
```

```
    n = 0
    while n < nbStart:
       k = random.randint(0, nb - 1)
       if e[k] == 0:
          e[k] = 1
          n += 1
    h[0] = nb - nbStart
    h[1] = nbStart
    drawSystem()

def drawSystem():
    # Draw energy niveaux
    for E in range(eMax + 1):
        line(-1, E, nb + 1, E)
    # Draw particles
    for i in range(nb):
        move(i, e[i])
        fillCircle(0.5)

def pair():
    i = random.randint(0, nb - 1)
    if  i == 0: # left border
        k = 1    # right neighbor
    elif i == nb - 1: # right border
        k = nb - 2    # left neighbor
    else: # not at border
        k = i - 1 + 2 * random.randint(0, 1)  # left or right neighbor
    if e[i] > 0 and e[k] < eMax:   # i not in ground state
        # i jumps down, k jumps up
        drawPair(i, k)
        modifyDistribution(i, k)
        e[i] -= 1
        e[k] += 1
        drawPair(i, k)

def modifyDistribution(i, k):
    h[e[i]] -= 1
    h[e[k]] -= 1
    h[e[i] - 1] += 1
    h[e[k] + 1] += 1

def drawPair(i, k):
    move(i, e[i])
    fillCircle(0.5)
    move(k, e[k])
    fillCircle(0.5)

def initDistribution():
    global p
    p = GPanel(-1, 11, -5, 55)
    p.title("Energy Distribution")
    p.enableRepaint(False)

def showDistribution():
    p.clear()
    p.setColor("black")
    p.lineWidth(1)
    drawPanelGrid(p, 0, 10, 0, 50)
    p.setColor("blue")
    p.lineWidth(4)
    for t in range(11):
        p.line(t, 0, t, h[t])
```

```
    p.repaint()

nb = 40 # Number of particles
nbStart = 30
eMax = 10  # Energy levels 0..10
d = 10 # Diameter of particles
dt = 0.01  # Simulation period (s)
e = [0] * nb # Energy of each particle
h = [0] * 11 # Energy distribution

initSystem()
initDistribution()

while not isDisposed():
   pair()
   showDistribution()
   delay(10)
```



Ausführen mit Webstart