

Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons.

Von **W. Heisenberg** und **H. Euler** in Leipzig.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 22. Dezember 1935.)

Aus der Diracschen Theorie des Positrons folgt, da jedes elektromagnetische Feld zur Paarerzeugung neigt, eine Abänderung der Maxwell'schen Gleichungen des Vakuums. Diese Abänderungen werden für den speziellen Fall berechnet, in dem keine wirklichen Elektronen und Positronen vorhanden sind, und in dem sich das Feld auf Strecken der Compton-Wellenlänge nur wenig ändert. Es ergibt sich für das Feld eine Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2) + \frac{e^2}{hc} \int_0^\infty e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3} \left\{ i\eta^2 (\mathcal{E}\mathcal{B}) \cdot \frac{\cos\left(\frac{\eta}{|\mathcal{E}_k|} \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2 + 2i(\mathcal{E}\mathcal{B})}\right) + \text{konj}}{\cos\left(\frac{\eta}{|\mathcal{E}_k|} \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2 + 2i(\mathcal{E}\mathcal{B})}\right) - \text{konj}} + |\mathcal{E}_k|^2 + \frac{\eta^2}{3} (\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2) \right\}.$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathcal{E}, \mathcal{B} \text{ Kraft auf das Elektron.} \\ |\mathcal{E}_k| = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = \frac{1}{137} \frac{e}{(e^2/mc^2)^2} = \text{„Kritische Feldstärke“} \end{array} \right)$$

Ihre Entwicklungsglieder für (gegen $|\mathcal{E}_k|$) kleine Felder beschreiben Prozesse der Streuung von Licht an Licht, deren einfachstes bereits aus einer Störungsrechnung bekannt ist. Für große Felder sind die hier abgeleiteten Feldgleichungen von den Maxwell'schen sehr verschieden. Sie werden mit den von Born vorgeschlagenen verglichen.

Die Tatsache, daß sich Materie in Strahlung und Strahlung in Materie verwandeln kann, führt zu einigen grundsätzlich neuen Zügen der Quantenelektrodynamik. Eine der wichtigsten Konsequenzen dieser Verwandelbarkeit besteht darin, daß schon für die Vorgänge im leeren Raume die Maxwell'schen Gleichungen durch kompliziertere Gleichungen zu ersetzen sind. Es wird nämlich einerseits nicht allgemein möglich sein, die Vorgänge im leeren Raume von den materiellen Vorgängen zu trennen, da die Felder, wenn ihre Energie ausreicht, Materie erzeugen können; andererseits wird selbst dort, wo die Energie zur Materieerzeugung nicht ausreicht, aus ihrer virtuellen Möglichkeit eine Art „Polarisation des Vakuums“ und damit eine Änderung der Maxwell'schen Gleichungen resultieren. Diese Polarisation des Vakuums, die im folgenden studiert werden soll, wird in der üblichen Weise zu einer Unterscheidung der Vektoren \mathcal{B}, \mathcal{E} einerseits und \mathcal{D}, \mathcal{H} andererseits den Anlaß geben, wobei

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{D} = \mathcal{E} + 4\pi \mathcal{P}, \\ \mathcal{H} = \mathcal{B} - 4\pi \mathcal{M}, \end{array} \right\} \quad (1)$$

gesetzt werden kann. Die Polarisierungen \mathcal{P} und \mathcal{M} können nun irgendwelche komplizierten Funktionen der Feldstärken am gleichen Ort, ihrer Ableitungen und der Feldstärken in der Umgebung des betrachteten Punktes sein. Wenn die Feldstärken sehr klein sind (dies bedeutet, wie später gezeigt werden wird, sehr klein gegen das $e^2/\hbar c$ -fache der Feldstärke am „Rande des Elektrons“), so kann man \mathcal{P} und \mathcal{M} näherungsweise als lineare Funktionen von \mathcal{E} und \mathcal{B} betrachten. In dieser Näherung haben Uehling¹⁾ und Serber²⁾ die Abänderungen der Maxwell'schen Theorie bestimmt. Einen anderen interessanten Grenzfall erhält man, wenn man die Feldstärken zwar nicht als klein, aber als sehr langsam veränderlich (d. h. nahezu konstant auf Strecken der Größenordnung \hbar/mc) betrachtet. Man erhält dann \mathcal{P} und \mathcal{M} als Funktionen von \mathcal{E} und \mathcal{B} am gleichen Ort, die Ableitungen von \mathcal{E} und \mathcal{B} kommen in dieser Näherung nicht mehr vor. Die Entwicklung von \mathcal{P} und \mathcal{M} nach \mathcal{E} und \mathcal{B} schreitet dann, wie die Rechnung zeigen wird, nach ungeraden Potenzen fort; die Glieder dritter Ordnung sind anschaulich für die Streuung von Licht an Licht verantwortlich und sind bereits bekannt³⁾. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die vollständige Bestimmung der Funktionen $\mathcal{P}(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ und $\mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ für den Grenzfall sehr langsam veränderlicher Feldstärken. Es genügt zu diesem Zwecke, die Energiedichte des Feldes $U(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ als Funktion von \mathcal{E} und \mathcal{B} zu berechnen, da aus der Energiedichte die Wellengleichungen nach dem Hamilton'schen Verfahren hergeleitet werden können: Man führt etwa die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ ein und setzt

$$\mathcal{D}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{E}_i}, \quad \mathcal{H}_i = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{B}_i}, \quad (2)$$

$$U(\mathcal{E}, \mathcal{B}) = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_i \mathcal{D}_i \mathcal{E}_i - \mathcal{L} \right] = \frac{1}{4\pi} \left(\sum_i \mathcal{E}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{E}_i} - \mathcal{L} \right) \quad (3)$$

und bestimmt dann die Lagrange-Funktion aus (3) und \mathcal{D} und \mathcal{H} aus (2). Da die Lagrange-Funktion relativistisch invariant sein muß, kann sie übrigens nur eine Funktion der beiden Invarianten $\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2$ und $(\mathcal{E}\mathcal{B})^2$ sein³⁾. Die Berechnung von $U(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ läßt sich zurückführen auf die Frage nach der Energiedichte des Materiefeldes, das mit den konstanten Feldern \mathcal{E} und \mathcal{B} verbunden ist. Bevor dieses Problem in Angriff genommen wird, soll das mathematische Schema der Positronentheorie⁴⁾ kurz rekapituliert

¹⁾ E. A. Uehling, Phys. Rev. **48**, 55, 1935. — ²⁾ R. Serber, ebenda **48**, 49, 1935. — ³⁾ H. Euler u. B. Kockel, Naturwissensch. **23**, 246, 1935. — ⁴⁾ W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **90**, 209, 1934; im folgenden als l. c. I zitiert.

werden, um einige in den früheren Formeln enthaltene Rechenfehler zu verbessern.

§ 1. Das mathematische Schema der Theorie des Positrons.

Die Theorie geht aus von einer Diracschen „Dichtematrix“, die in einer anschaulichen Wellentheorie durch

$$(x' t' k' | R | x'' t'' k'') = \sum_{\text{bes. Zust.}}^{(n)} \psi_n^*(x'' t'' k'') \psi_n(x' t' k'), \quad (4)$$

in der Quantentheorie der Wellenfelder durch

$$(x' t' k' | R | x'' t'' k'') = \psi^*(x'' t'' k'') \psi(x' t' k') \quad (5)$$

gegeben ist¹⁾. Außer dieser Matrix spielt eine wichtige Rolle die Matrix R_S , die durch

$$(x' t' k' | R_S | x'' t'' k'') = \frac{1}{2} \left(\sum_{\text{bes. Zust.}}^{(n)} - \sum_{\text{unbes. Zust.}}^{(n)} \right) \psi_n^*(x'' t'' k'') \psi_n(x' t' k') \quad (6)$$

bzw.

$$(x' t' k' | R_S | x'' t'' k'') = \frac{1}{2} [\psi^*(x'' t'' k'') \psi(x' t' k') - \psi(x' t' k') \psi^*(x'' t'' k'')] \quad (7)$$

definiert ist. Die Matrix R_S wird als Funktion der Differenzen $x'_\lambda - x''_\lambda = x_\lambda$; $t' - t'' = t$ singularär auf dem Lichtkegel. Setzt man

$$ct = x_0 = -x^0; \quad x_i = x^i; \quad \xi_\lambda = \frac{x'_\lambda + x''_\lambda}{2}, \quad (8)$$

ferner für die Potentiale $A_0 = -A^0$; $A_i = A^i$, für die Diracschen Matrizen: $\alpha^0 = -\alpha_0 = 1$; $\alpha^i = \alpha_i$, so wird

$$(x' k' | R_S | x'' k'') = u \frac{\alpha^0 x_0}{(x^2 x_\lambda)^2} - \frac{v}{x^2 x_\lambda} + w \log |x^2 x_\lambda|, \quad (9)$$

wobei²⁾

$$u = -\frac{i}{2\pi^2} e^{+\frac{e i}{\hbar c} \int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda} \quad (10)$$

(hierbei wird über zwei gleiche lateinische Indizes stets von 1 bis 3, über griechische von 0 bis 3 summiert). Das Integral ist auf der geraden Linie von P' nach P'' zu nehmen.

¹⁾ In l. c. I sind auf der rechten Seite fälschlich die eingestrichenen und die zweigestrichenen Größen vertauscht. — ²⁾ l. c. I enthält im Exponenten fälschlich das negative Vorzeichen.

Die für das Verhalten der Materie maßgebende Dichtematrix r erhält man aus R_S durch die Gleichung

$$r = R_S - S, \quad (11)$$

wobei S durch

$$S = e^{+\frac{e i}{\hbar c} \int_{P'}^{P''} A^\lambda dx_\lambda} \cdot S_0 + \frac{\bar{a}}{x_\lambda x^\lambda} + \bar{b} \log \left| \frac{x_\lambda x^\lambda}{C} \right| \quad (12)$$

gegeben ist. Hierin bedeutet S_0 die Matrix R_S im feld- und materiefreien Raum. \bar{a} , \bar{b} und C sind durch die folgenden Gleichungen definiert¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= u \left\{ \frac{e i}{24 \hbar c} x_\rho x^\sigma \alpha^\lambda \left(\frac{\partial F_{\lambda\sigma}}{\partial \xi_\rho} - \delta_{\lambda\rho} \frac{\partial F_{\tau\sigma}}{\partial \xi_\tau} \right) - \frac{e^2}{48 \hbar^2 c^2} x_\rho x_\sigma x^\tau \alpha^\rho F^{\mu\sigma} F_{\mu\tau} \right\}, \\ \bar{b} &= u \left\{ \frac{e i}{24 \hbar c} \alpha^\lambda \frac{\partial F_{\tau\lambda}}{\partial \xi_\tau} + \frac{e^2}{24 \hbar^2 c^2} x_\lambda \alpha^\mu (F_{\tau\mu} F^{\tau\lambda} - \frac{1}{4} \delta_\mu^\lambda F_{\tau\sigma} F^{\tau\sigma}) \right\}, \\ C &= 4 \left(\frac{\hbar}{\gamma m c} \right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

γ bedeutet die Eulersche Konstante $\gamma = 1, 781\dots$

Den Vierervektor der Stromdichte sowie den Energie- und Impulstensor erhält man aus r durch

$$\left. \begin{aligned} s_\lambda(\xi) &= -e \sum_{k' k''} \alpha_{k' k''}^\lambda (\xi k' | r | \xi k''), \\ U_\nu^\mu(\xi) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ i c \hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{e}{2} \left[A^\mu \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + A^\mu \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \right\} \\ &\quad \sum_{k' k''} \alpha_{k' k''}^\nu \left(\xi + \frac{x}{2}, k' | r | \xi - \frac{x}{2}, k'' \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

In der Quantentheorie der Wellenfelder ist es zweckmäßig, die Wellenfunktion nach einem Orthogonalsystem zu entwickeln:

$$\psi(x, k) = \sum_n a_n u_n(x, k). \quad (15)$$

Die Operatoren a_n kann man darstellen in der Form

$$a_n^* = N_n \Delta_n V_n; \quad a_n = V_n \Delta_n N_n, \quad (16)$$

wobei Δ_n die Zahl N_n in $1 - N_n$ verwandelt und $V_n = \prod_{t \leq n} (1 - 2 N_t)$.

Ferner sei

$$a'_n = a_n^* = -V_n \Delta_n N'_n; \quad a'_n = -N'_n \Delta_n V_n; \quad N'_n = 1 - N_n.$$

¹⁾ Gleichung (38) in l. c. I enthält einen Rechenfehler, der zu einem anderen Wert für C führte; dort war auch der Buchstabe γ , dem allgemeinen Gebrauch widersprechend, für den Logarithmus der Eulerschen Konstante verwendet worden.

Für die Hamilton-Funktion des Gesamtsystems ergibt sich in diesen Variablen:

$$\begin{aligned}
 H = \lim_{x \rightarrow 0} \int d\xi & \left\{ - \left(c i \hbar \frac{\partial}{\partial x_l} - \frac{e}{2} \left[A^l \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + A^l \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \right) \right. \\
 & \sum_{k' k''} \alpha_{k' k''}^l \sum_{m, n} \frac{1}{2} (a_n^* a_m - a_m a_n^*) u_n^* \left(\xi - \frac{x}{2}, k'' \right) u_m \left(\xi + \frac{x}{2}, k' \right) \\
 & + \sum_{k' k''} \beta_{k' k''} m c^2 \sum_{m, n} \frac{1}{2} (a_n^* a_m - a_m a_n^*) u_n^* \left(\xi - \frac{x}{2}, k'' \right) u_m \left(\xi + \frac{x}{2}, k' \right) \\
 & - \sum_{k'} \left(c i \hbar \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{e}{2} \left[A^0 \left(\xi + \frac{x}{2} \right) + A^0 \left(\xi - \frac{x}{2} \right) \right] \right) \left(\xi + \frac{x}{2}, k' | S | \xi - \frac{x}{2}, k' \right) \\
 & \left. + \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{B}^2) \right\}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

oder einzeln bei Entwicklung nach Potenzen der Elementarladung:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \sum_{E_n > 0} N_n E_n - \sum_{E_n < 0} N'_n E_n + \sum_{g^e} M_{g^e} h \nu_{g^e}, \\
 H_1 &= \int d\xi e A^l(\xi) \sum_{k' k''} \alpha_{k' k''}^l \left[\sum_{E_n > 0} N_n u_n^*(\xi, k'') u_n(\xi, k') \right. \\
 & \left. - \sum_{E_n < 0} N'_n u_n^*(\xi, k'') u_n(\xi, k') + \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} (a_n^* a_m - a_m a_n^*) u_n^*(\xi, k'') u_m(\xi, k') \right], \\
 H_2 &= \int d\xi \left[i \frac{e^2}{2 \hbar c} \left(\int A^\lambda d x_\lambda \right)^2 \sum_{k'} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\xi + \frac{x}{2}, k' | S_0 | \xi - \frac{x}{2}, k' \right) \right. \\
 & + \frac{1}{12 \pi^2} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{x_\lambda x^\sigma}{x_0 x^0} A^\lambda \left(\frac{\partial F_{0\sigma}}{\partial \xi_0} - \frac{\partial F_{\tau\sigma}}{\partial \xi_\tau} \right) + \frac{1}{24 \pi^2} \frac{e^3}{\hbar c} \frac{x_\sigma x^\tau}{x_0 x^0} F^{\mu\sigma} F_{\mu\tau} \\
 & \left. - \frac{1}{12 \pi^2} \frac{e^2}{\hbar c} \log \left| \frac{x_0 x^0}{C} \right| \left(F^{\tau 0} F_{\tau 0} - \frac{1}{4} F_{\tau\mu} F^{\tau\mu} \right) \right], \\
 H_3 &= - \frac{1}{6} \frac{e^3}{\hbar^2 c^2} \int d\xi (A^\lambda x_\lambda)^3 \frac{\partial}{\partial x_0} \sum_{k'} \left(\xi + \frac{x}{2}, k' | S_0 | \xi - \frac{x}{2}, k' \right), \\
 H_4 &= - \frac{1}{12 \pi^2} \frac{(e^2)^2}{(\hbar c)^2} \frac{1}{\hbar c} \int d\xi \frac{(A^\lambda x_\lambda)^4}{(x_0 x^0)^2}.
 \end{aligned} \quad (18)$$

§ 2. Berechnung der Energiedichte in der anschaulichen Wellentheorie.

Da die Lagrange-Funktion, die den gesuchten abgeänderten Maxwell'schen Gleichungen zugeordnet ist, eine Funktion der beiden Invarianten $\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2$ und $(\mathfrak{E}\mathfrak{B})^2$ allein sein muß, genügt für ihre Berechnung die Ermittlung der Energiedichte des Materiefeldes als Funktion zweier unabhängiger Feldgrößen. Z. B. wird es genügen, die Energiedichte der Materie in einem konstanten elektrischen und einem zu ihm parallelen konstanten magnetischen Feld zu bestimmen. In diesen konstanten Feldern ist also der Zustand des Materiefeldes zu untersuchen, der dem Nichtvorhandensein

von Materie entspricht, also offenbar der Zustand tiefster Energie. Wenn man zunächst die anschauliche Wellentheorie, also die Gleichungen (4) und (6) zugrunde legt, so ist der Zustand tiefster Energie im feldfreien Raum dadurch gegeben, daß sämtliche Elektronenzustände negativer Energie besetzt, sämtliche Zustände positiver Energie unbesetzt sind. Wenn nur ein Magnetfeld vorhanden ist, so können die stationären Zustände eines Elektrons wieder in eindeutiger Weise in solche negativer und solche positiver Energie eingeteilt werden, der Zustand kleinster Energie des Materiefeldes kann also im Magnetfeld genau wie im feldfreien Raume gewonnen werden.

Anders ist es jedoch in einem elektrischen Felde. Hier wächst die potentielle Energie linear mit einer Koordinate, sämtliche Energiewerte von $-\infty$ bis $+\infty$ sind möglich, und die Eigenfunktionen, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, gehen im allgemeinen einfach durch eine räumliche Verschiebung ineinander über. Eine Einteilung in positive und negative Eigenwerte ist hier nicht eindeutig durchführbar.

Diese Schwierigkeit hängt physikalisch mit der Tatsache zusammen, daß in einem konstanten elektrischen Felde von selbst Paare von Positronen und Elektronen entstehen. Die exakte Durchrechnung dieses Problems verdankt man Sauter¹⁾. In Fig. 1 ist zunächst die potentielle Energie $V(x)$ als Funktion der Koordinate (das elektrische Feld wird parallel zur x -Achse angenommen) aufgetragen, ferner die Linien $V(x) + mc^2$ und $V(x) - mc^2$. Die Rechnungen von Sauter zeigen, daß die Eigenfunktionen, die etwa

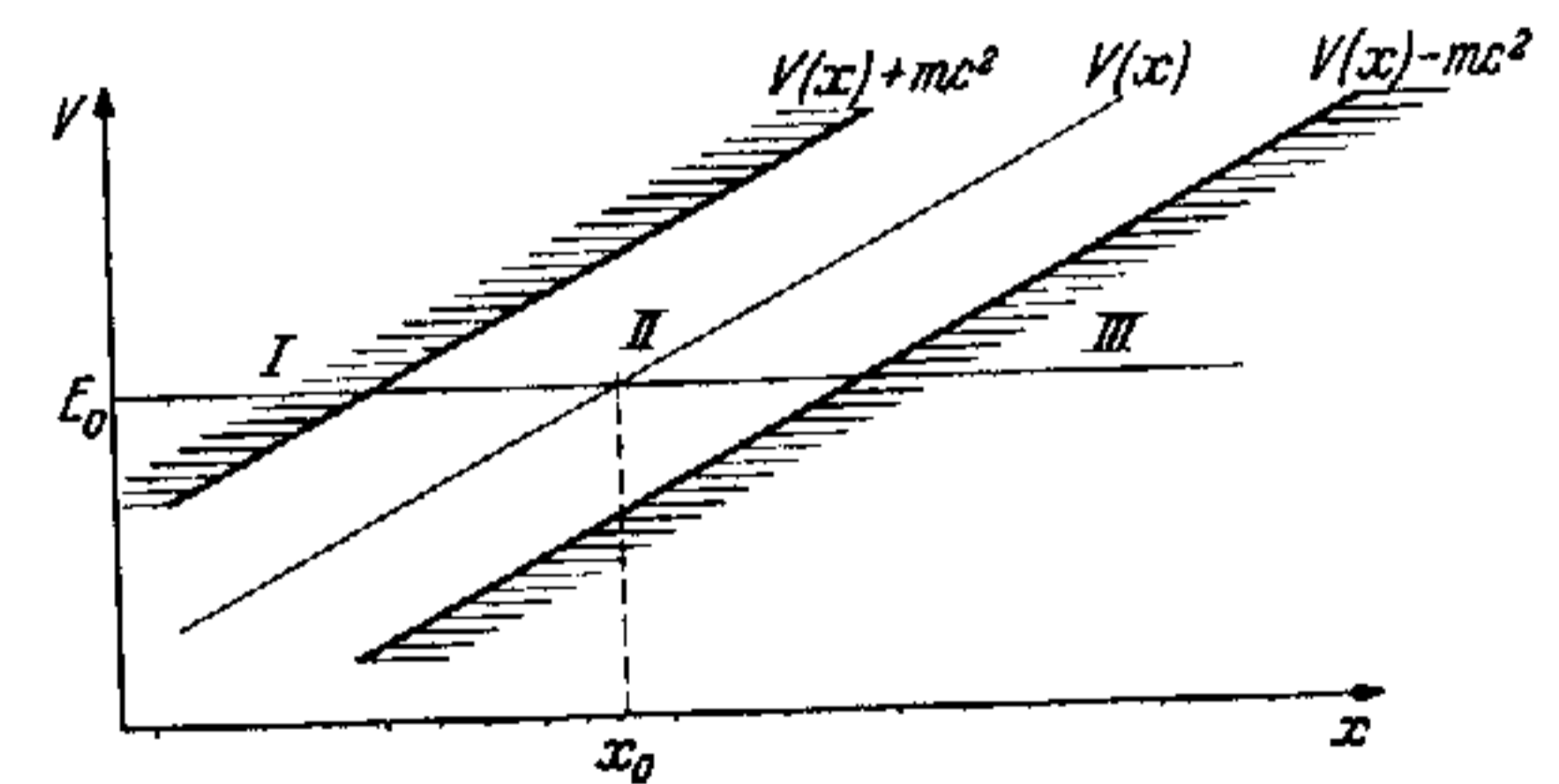


Fig. 1.

zum Eigenwert E_0 gehören, nur in den Gebieten I und III groß sind, daß sie jedoch im Innern des Gebietes II exponentiell abnehmen. Dies hat zur Folge, daß eine Wellenfunktion, die etwa zunächst nur in einem Gebiet, z. B. I, groß ist, allmählich in das Gebiet III ausläuft, wobei der Durchlaßkoeffizient durch das Gebiet II, das hier die Rolle eines Gamowberges spielt, nach Sauter von der Größenordnung $e^{-\frac{m^2 c^3}{\hbar e |\mathfrak{E}|} \pi}$ ist. Bezeichnet man $|\mathfrak{E}_k| = \frac{m^2 c^3}{\hbar e}$

1) F. Sauter, ZS. f. Phys. 69, 742, 1931.

als kritische Feldstärke, so kann man hierfür auch $e^{-\frac{|\mathcal{E}_k|}{|\mathcal{E}|} \pi}$ schreiben. Solange nun $|\mathcal{E}| \ll |\mathcal{E}_k|$ ist, kann man von dieser außerordentlich seltenen Paarbildung in einer gewissen Näherung absehen. Es muß dann möglich sein, Lösungen der Dirac-Gleichung zu finden, welche die Stelle der Eigenfunktionen vertreten und etwa nur im Gebiet I groß sind, dagegen im ganzen Gebiet III für eine gewisse Zeit klein

bleiben von der Ordnung $e^{-\frac{|\mathcal{E}_k|}{|\mathcal{E}|} \frac{\pi}{2}}$; umgekehrt auch solche, die nur im Gebiet III groß sind, aber in I beinahe verschwinden. Wenn dies gelungen ist, so wird man den Zustand tiefster Energie dadurch charakterisieren, daß alle Elektronenzustände, deren Eigenfunktionen nur im Gebiet III groß sind, besetzt sind, die anderen unbesetzt. Als Energie des betreffenden Elektronenzustandes wird man bei der Berechnung der Energiedichte im Punkte x_0 den Abstand des betreffenden Energiewertes von E_0 bezeichnen. [Vgl. hierzu Gleichung (31)]. Der so charakterisierte Zustand des Gesamtsystems geht, wenn man das elektrische Feld adiabatisch abschaltet, in den Zustand des feldfreien Raumes über, bei dem nur Elektronenzustände negativer Energie besetzt sind.

In der mathematischen Durchführung schließen wir uns an die Untersuchung von Sauter (l. c.) an. Wenn ein äußeres Magnetfeld \mathcal{B} und ein elektrisches Feld \mathcal{E} , beide in der x -Richtung, vorhanden sind, so lautet die Diracsche Gleichung:

$$\left\{ \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} |\mathcal{E}| x + \alpha_1 i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial z} - \frac{e}{c} |\mathcal{B}| y \right) - \beta m c \right\} \psi = 0. \quad (19)$$

Die Bewegung in der y - und z -Richtung läßt sich von der in der x -Richtung separieren durch den Ansatz:

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar} (p_z z - Et)} \cdot u_n(y) \cdot \chi. \quad (20)$$

Wir führen dann einen neuen Operator K ein durch die Beziehung

$$K = +\alpha_2 i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3 \left(-p_z - \frac{e}{c} |\mathcal{B}| y \right) - \beta m c. \quad (21)$$

Es ergibt sich:

$$K^2 \psi = \left\{ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - i\hbar \alpha_3 \alpha_3 \frac{e |\mathcal{B}|}{c} + \left(p_z + \frac{e}{c} |\mathcal{B}| y \right)^2 + m^2 c^2 \right\} \psi. \quad (22)$$

Diese Gleichung kann man als Wellengleichung für die noch nicht bestimmte Funktion $u_n(y)$ auffassen. Setzt man

$$y = \eta \sqrt{\frac{\hbar c}{e |\mathcal{B}|}} - \frac{c p_z}{e |\mathcal{B}|}, \quad (23a)$$

so wird, da (22) im wesentlichen die Schrödinger-Gleichung des Oszillators bedeutet:

$$u_n(y) = H_n(\eta) e^{-\frac{\eta^2}{2}} (2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\pi})^{-1/2} \left(\frac{\hbar c}{e |\mathcal{B}|} \right)^{-1/4} \quad (23)$$

($H_n(\eta)$ ist das n -te Hermitesche Polynom), woraus

$$K^2 u_n \chi = \left\{ m^2 c^2 + \frac{e |\mathcal{B}| \hbar}{c} (2n + 1 + \sigma_x) \right\} u_n \chi \quad (24)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$)

folgt.

Der Operator K ist ferner mit α_1 antikommutativ. In der Wellengleichung (19), die sich auch in der Form

$$\left\{ \frac{E - e |\mathcal{E}| x}{c} + \alpha_1 i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + K \right\} \psi = 0 \quad (25)$$

schreiben läßt, kann man nun eine kanonische Transformation der χ vornehmen derart, daß σ_x Diagonalmatrix wird, während für K und α_1 die Darstellungen gelten:

$$K = \sqrt{m^2 c^2 + \frac{e |\mathcal{B}| \hbar}{c} (2n + 1 + \sigma_x)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix}; \quad \alpha_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (26)$$

Dabei beziehen sich die beiden Matrizen auf einen weiteren, von der Spinrichtung unabhängigen Index (also auf die „ ρ “-Koordinate). Man kann dann σ_x als eine gewöhnliche Zahl betrachten ($\sigma_x = \pm 1$) und erhält mit den Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \sqrt{\frac{1}{\hbar c e |\mathcal{E}|}} (e |\mathcal{E}| x - E), \\ k &= \sqrt{\frac{c}{\hbar e |\mathcal{E}|} \left(m^2 c^2 + \frac{e |\mathcal{B}| \hbar}{c} (2n + 1 + \sigma_x) \right)} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d}{d\xi} - i\xi \right) f + k g &= 0, \\ \left(\frac{d}{d\xi} + i\xi \right) g + k f &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

wobei f und g die beiden Komponenten (bezogen auf den „ ρ “-Index) der Funktion χ bedeuten. Die Gleichungen (28) sind formal identisch mit den Gleichungen (12) bei Sauter (l. c.). Sie unterscheiden sich von den Sauterschen jedoch durch die Bedeutung der Größe k und dadurch, daß eigentlich das System (28) zweimal, einmal für $\sigma_x = +1$, einmal für

$\sigma_x = -1$ anzuschreiben wäre. Sauter erhält zwei Lösungssysteme für Gleichung (28):

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} |\xi| \int e^{-\xi^2 s} \left(s + \frac{i}{2}\right)^{-\frac{k^2}{4i} - \frac{1}{2}} \left(s - \frac{i}{2}\right)^{\frac{k^2}{4i}} ds, \\ g_1 &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{k|\xi|}{2\xi} \int e^{-\xi^2 s} \left(s + \frac{i}{2}\right)^{-\frac{k^2}{4i} - \frac{1}{2}} \left(s - \frac{i}{2}\right)^{\frac{k^2}{4i} - 1} ds, \\ f_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{k|\xi|}{2\xi} \int e^{-\xi^2 s} \left(s + \frac{i}{2}\right)^{-\frac{k^2}{4i} - 1} \left(s - \frac{i}{2}\right)^{\frac{k^2}{4i} - \frac{1}{2}} ds, \\ g_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} |\xi| \int e^{-\xi^2 s} \left(s + \frac{i}{2}\right)^{-\frac{k^2}{4i}} \left(s - \frac{i}{2}\right)^{\frac{k^2}{4i} - \frac{1}{2}} ds. \end{aligned} \right\} (29)$$

Die Integrale sind auf einem Wege zu nehmen, der von $+\infty$ herkommend die beiden singulären Punkte $+i/2$ und $-i/2$ im positiven Sinne umläuft und wieder nach $+\infty$ zurückkehrt.

Da für unsere Rechnungen von der Paarerzeugung abgesehen werden soll, betrachten wir, wie oben besprochen wurde, als Eigenfunktionen jeweils nur Teile der Funktionen f und g , die in der einen Hälfte des Raumes verschwinden. Wir setzen also etwa

$$f_1^1 = \begin{cases} f_1 & \text{für } \xi > 0, \\ 0 & \text{„ } \xi \leq 0, \end{cases} \quad f_1^2 = \begin{cases} 0 & \text{für } \xi > 0, \\ f_1 & \text{„ } \xi \leq 0 \end{cases} \text{ usw.} \quad (30)$$

Die neuen Funktionen f_1^1 usw. entsprechen nicht genau stationären Zuständen, sondern sie stellen Wellenpakete dar, die mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit in das zu Anfang leere Gebiet diffundieren. Für die Bildung der Dichtematrix betrachten wir die Zustände f_1^1, g_1^1, \dots als besetzt, die Zustände f_1^2, g_1^2, \dots als unbesetzt. Da wir durch den Prozeß (30) die Anzahl der „Zustände“ verdoppelt haben, wird man, wenn man alle $f_1^1, g_1^1, f_2^1, g_2^1$ als besetzt, $f_1^2, g_1^2, f_2^2, g_2^2$ als unbesetzt rechnet, gerade die doppelte Dichtematrix erhalten.

Um die Energiedichte des Vakuums zu berechnen, würde nach den in § 1 beschriebenen Methoden zunächst die Dichtematrix für einen endlichen Abstand der beiden Punkte r' und r'' zu berechnen sein. Von dieser hätte man die dort angegebene singuläre Matrix S zu subtrahieren, dann die Energiedichte zu bilden und zum Limes $r' = r''$ überzugehen. Für die folgenden Rechnungen ist es bequemer, von Anfang an $r' = r''$ zu setzen, aber dafür die Summation über die stationären Zustände zunächst nur bis zu endlichen Energien zu erstrecken, oder, was ungefähr dasselbe ist, diese Summation durch einen Zusatzfaktor $e^{-\text{const} \cdot [E^2 - (m c^2)^2]}$ konvergent zu

machen. Läßt man dann die Konstante im Exponenten gegen Null gehen, so werden einige Glieder der Energiedichte singulär und diese werden von den entsprechenden Gliedern der Matrix S kompensiert werden. Die übrigbleibenden regulären Glieder geben dann das gewünschte Resultat.

Bevor die Dichtematrix angeschrieben werden kann, müssen die Eigenfunktionen normiert werden. Man kann sich etwa den Raum der Eigenfunktionen in der x - und der z -Richtung auf eine sehr große Länge L beschränkt denken [die Eigenfunktionen $u_n(y)$ sind schon normiert]. Dann erhält man von der z -Richtung den Normierungsfaktor $1/\sqrt{L}$; von der x -Richtung wegen des asymptotischen Verhaltens der Sauterschen Eigenfunktionen [l. c. Gleichung (22)] den Faktor $2 \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-\frac{k^2 \pi}{4}}$. Die Summe über alle Zustände ist dann zu bilden über alle Impulse der Form

$$p_x = \frac{h}{L} \cdot m + \text{const}$$

und über alle Energien der Form $E = \frac{hc}{(L/2)} m + \text{const}$. Diese beiden Summen kann man also verwandeln in Integrale, deren Differential lautet $\frac{dp_x}{h} \cdot \frac{dE}{2hc}$, wenn die Faktoren $\frac{1}{\sqrt{L}}$ in der Eigenfunktion wieder weggelassen werden. Bedenkt man schließlich noch, daß als Energie eines Zustandes, wenn wir die Dichte an der Stelle x_0 berechnen, die Differenz $E - e|\mathcal{E}|x_0$ zu verstehen ist, so ergibt sich für die der Matrix R_S (vgl. § 1) entsprechende Energiedichte der Ausdruck [für die Bedeutung von a vgl. (33)]:

$$U = \frac{1}{2} \sum_0^\infty \sum_{-1}^{+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_x}{h} \int \frac{dE}{hc} (E - e|\mathcal{E}|x) u_n^2(y) e^{-\frac{k^2 \pi}{2}} \left[\begin{aligned} &|f_1^1|^2 + |g_1^1|^2 - |f_1^2|^2 - |g_1^2|^2 \\ &+ |f_2^1|^2 + |g_2^1|^2 - |f_2^2|^2 - |g_2^2|^2 \end{aligned} \right] e^{-\alpha(\xi^2 - \frac{1}{a})}, \quad (31)$$

was wegen (23a) übergeht in

$$U = - \sum_0^\infty \sum_{-1}^{+1} \frac{e|\mathcal{B}|}{c} \frac{\hbar e|\mathcal{E}|}{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi |\xi| e^{-\frac{k^2 \pi}{2} + \frac{\alpha}{a}} \cdot \frac{1}{2} [|f_1^1|^2 + |g_1^1|^2 + |f_2^1|^2 + |g_2^1|^2] e^{-\alpha \xi^2}. \quad (32)$$

Von diesem Ausdruck ist später das Verhalten für $\alpha \rightarrow 0$ zu diskutieren. Wir führen die folgenden Abkürzungen ein:

$$\frac{e|\mathcal{E}|\hbar}{m^2 c^3} = a; \quad \frac{e|\mathcal{B}|\hbar}{m^2 c^3} = b. \quad (33)$$

a und b sind dimensionslos und bedeuten das Verhältnis der Feldstärken zur kritischen Feldstärke $|\mathfrak{E}_k|$, d. h. zu dem „137ten Teil der Feldstärke am Rande des Elektrons“.

Durch Einsetzen der Gleichung (29) erhält man schließlich

$$U = -\frac{1}{2} \sum_0^\infty \sum_{-1}^{+1} \binom{n}{\sigma} a \cdot b \cdot m c^2 \left(\frac{m c}{\hbar}\right)^3 \cdot \frac{1}{4 \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi |\xi| e^{-\frac{k^2 \pi}{2} + \frac{\alpha}{a} - \alpha \xi^2} \int d s_1 \int d s_2 e^{-\xi^2 (s_1 + s_2)} e^{-\frac{k^2}{4i} \log \frac{(s_1 + \frac{i}{2})(s_2 + \frac{i}{2})}{(s_1 - \frac{i}{2})(s_2 - \frac{i}{2})}} \cdot h(s_1 s_2), \quad (34)$$

wobei $h(s_1 s_2)$ gegeben ist durch

$$h(s_1 s_2) = \frac{1}{2 \pi (s_1 + \frac{i}{2})^{1/2} (s_2 - \frac{i}{2})^{1/2}} \left[\xi^2 + \frac{k^2}{4 (s_1 - \frac{i}{2})(s_2 + \frac{i}{2})} \right].$$

Die Integration über ξ liefert

$$U = -\frac{1}{2} \sum_0^\infty \sum_{-1}^{+1} \binom{n}{\sigma} a \cdot b \cdot m c^2 \left(\frac{m c}{\hbar}\right)^3 \cdot \int d s_1 \int d s_2 e^{-\frac{k^2 \pi}{2} + \frac{\alpha}{a} - \frac{k^2}{4i} \log \frac{(s_1 + \frac{i}{2})(s_2 + \frac{i}{2})}{(s_1 - \frac{i}{2})(s_2 - \frac{i}{2})}} \cdot \frac{1}{8 \pi^3} (s_1 + \frac{i}{2})^{-1/2} (s_2 - \frac{i}{2})^{-1/2} \left[\frac{1}{(s_1 + s_2 + \alpha)^2} + \frac{k^2}{4 (s_1 + s_2 + \alpha)(s_1 - \frac{i}{2})(s_2 + \frac{i}{2})} \right]. \quad (35)$$

Das erste der beiden s -Integrale, etwa das über s_1 , läßt sich leicht ausführen, indem man den Integrationsweg soweit deformiert, daß nur eine Schleife um den Pol $s_1 = -s_2 - \alpha$ übrig bleibt. Ersetzt man im Resultat noch s_2 durch $s = s_2 + \alpha/2$, so erhält man

$$U = \sum_0^\infty \sum_{-1}^{+1} \binom{n}{\sigma} a \cdot b \cdot m c^2 \left(\frac{m c}{\hbar}\right)^3 \cdot f(k) \cdot e^{\frac{\alpha}{a}}, \quad (36)$$

wobei

$$f(k) = -\int d s \frac{1}{32 \pi^2} \left(s - \frac{i}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(s - \frac{i}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(s + \frac{i}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)^{-1} \left(s + \frac{i}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)^{-1} \left[k^2 (i - \alpha) + 2 \left(s + \frac{i}{2}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{2} \right] e^{-\frac{k^2 \pi}{2} - \frac{k^2}{4i} \log \frac{s^2 - \left(\frac{i - \alpha}{2}\right)^2}{s^2 - \left(\frac{i + \alpha}{2}\right)^2}}. \quad (37)$$

Die Integration ist hier in der in Fig. 2 angegebenen Weise auf einem Weg von $+\infty$ her zwischen den vier Polen des Integranden ($s = \pm i/2 \pm \alpha/2$) hindurch und nach $+\infty$ zurück zu erstrecken. Man kann dafür auch einfach auf der imaginären Achse von $+\infty$ bis $-\infty$ integrieren. Den Hauptbeitrag liefert der zwischen den Polen gelegene Teil der Integrationsstrecke. Dort kann man den Logarithmus im Exponenten nach Potenzen von α entwickeln und erhält

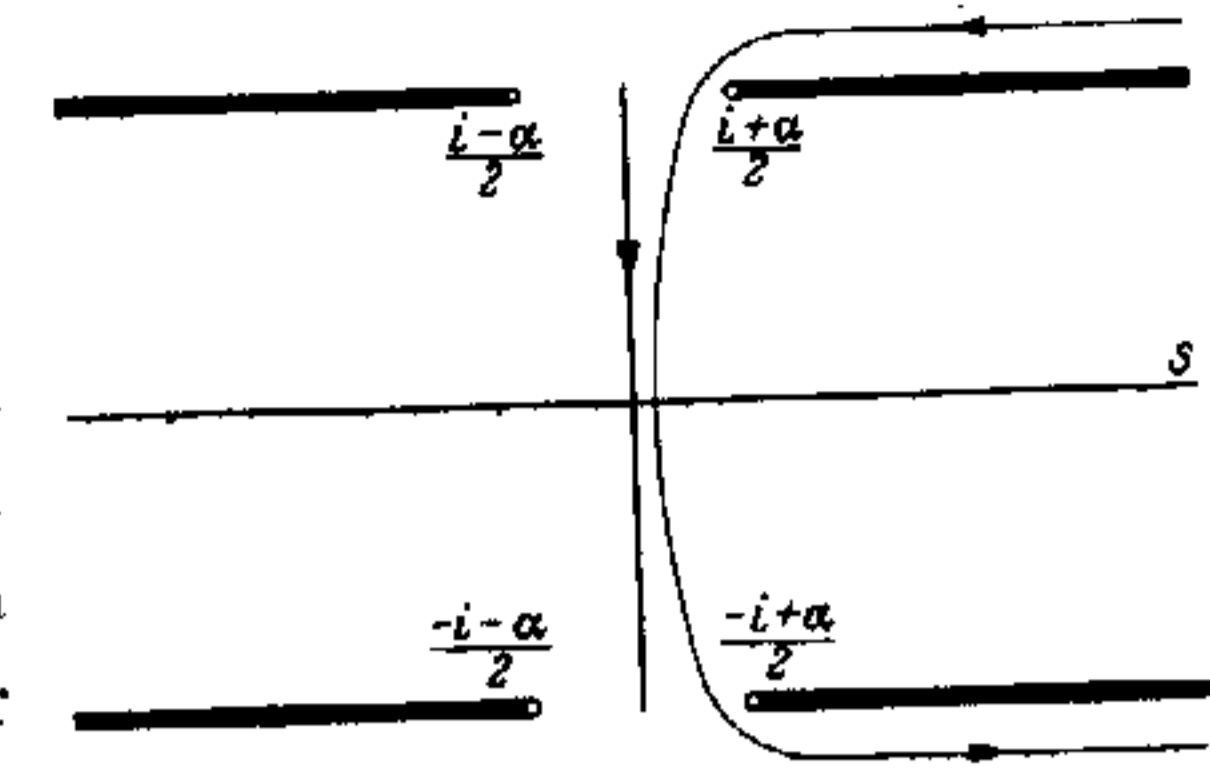


Fig. 2.

$$\log \frac{s^2 - \left(\frac{i - \alpha}{2}\right)^2}{s^2 - \left(\frac{i + \alpha}{2}\right)^2} = -2 \pi i + \frac{i \alpha}{s^2 + \frac{1}{4}} + \frac{i \alpha^3}{4 (s^2 + \frac{1}{4})^2} - \frac{i \alpha^5}{12 (s^2 + \frac{1}{4})^3} + \dots \quad (38)$$

Für die weiteren Rechnungen soll nun angenommen werden, daß das elektrische Feld klein sei gegen das kritische Feld $|\mathfrak{E}_k|$, d. h. $a \ll 1$ und daher

$$k^3 = \frac{1}{a} [1 + b (2n + 1 + \sigma_x)] \gg 1.$$

Man muß dann den Ausdruck $-\frac{k^2 \alpha}{4 s^2 + 1}$ im Exponenten stehenlassen; kann aber die höheren Glieder im Exponenten, da schließlich nur der $\lim \alpha \rightarrow 0$ betrachtet wird, als klein ansehen und nach ihnen entwickeln. Man erhält auf diese Weise für $f(k)$ einen Ausdruck der Form

$$f(k) = \frac{1}{2 \pi^2} \int_{-i/2}^{+i/2} d s e^{-\frac{k^2 \alpha}{4 s^2 + 1}} (1 + 4 s^2)^{-2} [A + B k^2 + C k^4 \dots]. \quad (39)$$

Vor der Ausführung des Integrals ist es zweckmäßig, die Summation über n und σ vorzunehmen; diese erfolgt nach dem Schema

$$\sum_{-1}^{+1} \sum_0^\infty \binom{n}{\sigma} g\left(n + \frac{1 + \sigma_x}{2}\right) = \left(\sum_0^\infty + \sum_1^\infty\right) g(n) = \lim_{n' \rightarrow \infty} \left\{ g(0) + 2 \sum_1^{n'} g(n) + 2 \int_{n'+1/2}^\infty g(n) d n + \frac{1}{2} g'(n' + \frac{1}{2}) + \dots \right\}. \quad (40)$$

Dabei stellt es sich heraus, daß die höheren Glieder der Eulerschen Summenformel zum Endresultat nichts beitragen. Schließlich erhält man, wenn

$\alpha/a = \varepsilon$ gesetzt wird (γ bedeutet die Eulersche Konstante $\gamma = 1,781$), für $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{U}{4\pi m c^2} \left(\frac{h}{m c}\right)^3 \\ &= \lim_{n' \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon} - \left(\frac{1}{8} + \frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right) \log \frac{\gamma \varepsilon}{4} - \frac{1}{16} - \frac{b^2}{6} - \frac{a^2}{12} \right. \\ & \quad - \frac{1}{16} + \frac{b^2}{8} + \frac{[1 + (2n' + 1)b]^2}{16} \\ & \quad - \frac{1}{8} [1 + (2n' + 1)b]^2 \log [1 + (2n' + 1)b] \\ & \quad + \frac{b^2}{24} \log [1 + (2n' + 1)b] + \frac{b}{2} \sum_1^{n'} (1 + 2nb) \log (1 + 2nb) \\ & \quad + \frac{a^2}{12} \left\{ b + 2b \sum_1^{n'} \frac{1}{(1 + 2nb)} - \log [1 + (2n' + 1)b] \right\} \\ & \quad + \frac{a^4}{90} \left\{ b + 2b \sum_1^{n'} \frac{1}{(1 + 2nb)^3} \right\} \\ & \quad \left. + \sum_{m=3}^{\infty} c_m a^{2m} \left\{ b + 2b \sum_1^{n'} \frac{1}{(1 + 2nb)^{2m-1}} \right\} \right\}. \quad (41) \end{aligned}$$

(Die Koeffizienten c_m werden weiter unten bestimmt).

Von diesem Resultat sind nun noch diejenigen Teile zu subtrahieren, die der singulären Matrix S entsprechen. Den feldunabhängigen Teil dieser abzuziehenden singulären Energiedichte erhält man leicht, indem man die hier vorgenommene Rechnung mit ebenen Wellen wiederholt.

$$\begin{aligned} U'_S &= -2 \int c \sqrt{m^2 c^2 + p^2} e^{-\varepsilon \left(\frac{p}{m c}\right)^2} \frac{d p_x d p_y d p_z}{h^3} \\ &= 4\pi m c^2 \left(\frac{m c}{h}\right)^3 \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{8} \log \frac{\gamma \varepsilon}{4} - \frac{1}{16}\right). \end{aligned}$$

Dagegen ist es schwieriger, die feldabhängigen Teile von S zu ermitteln. Da nach Gleichung (13) in \bar{a} und \bar{b} nur die Quadrate der Feldstärken vorkommen, folgt dies auch für U_S . Da ferner die Konstante C in Gleichung (18) so eingerichtet ist, daß für konstante Felder eine dem Feld proportionale Polarisation des Vakuums nicht eintritt, so folgt, daß die im Felde quadratischen Glieder sämtlich abzuziehen sind und nur die höheren Glieder stehenbleiben. Dies bedeutet, wenn man die Entwicklung nach b für $b \ll 1$ vorwegnimmt, daß die erste Zeile der rechten Seite von Gleichung (41) im Ganzen abzuziehen ist. Wir haben dieses Resultat auch dadurch nach-

geprüft, daß wir im Falle $a = 0, b \neq 0$ die Punkte r' und r'' der Dichtematrix in der x -Richtung verschieden annahmen [$r' - r'' = (x, 0, 0)$] und dann $\alpha = \varepsilon = 0$ setzten. Nach Abzug der von der Matrix S herrührenden Glieder blieb der eben besprochene Teil von U übrig. Für das elektrische Feld erwies sich diese Rechnung jedoch als sehr kompliziert. Von der gesamten Energiedichte, die sich aus der gewöhnlichen Maxwell'schen Energiedichte $\frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{B}^2)$ und der Diracschen Energiedichte $U - U_S$ zusammensetzt, können wir sogleich zur Lagrange-Funktion übergehen durch die Relation (8)

$$a \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a} - \mathfrak{L} = 4\pi \left(U - U_S + \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{B}^2) \right).$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) \\ &+ 16\pi^2 m c^2 \left(\frac{m c}{h}\right)^3 \lim_{n' \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{16} - \frac{b^2}{8} - \frac{[1 + (2n' + 1)b]^2}{16} (1 - 2 \log [1 + (2n' + 1)b]) \right. \\ & \quad - \frac{b^2}{24} \log [1 + (2n' + 1)b] - \frac{b}{2} \sum_1^{n'} (1 + 2nb) \log (1 + 2nb) \\ & \quad + \frac{b a^2}{12} \left(1 + 2 \sum_1^{n'} \frac{1}{1 + 2nb} - \frac{1}{b} \log [1 + (2n' + 1)b] \right) \\ & \quad + \frac{b a^4}{90} \left(1 + 2 \sum_1^{n'} \frac{1}{(1 + 2nb)^3} \right) \\ & \quad \left. + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{c_m}{2m-1} a^{2m} b \left(1 + 2 \sum_1^{n'} \frac{1}{(1 + 2nb)^{2m-1}} \right) \right\}. \quad (42) \end{aligned}$$

Für kleine Magnetfelder kann man durch nochmalige Anwendung der Eulerschen Summenformel auf die Gleichung (42) die Potenzreihenentwicklung nach b finden. Da ferner \mathfrak{L} nur von den beiden Invarianten $a^2 - b^2$ und $a^2 b^2$ abhängen kann — woraus für $\mathfrak{L}(a, b)$ folgt: $\mathfrak{L}(a, 0) = \mathfrak{L}(0, i a)$ —, so kann man die noch fehlenden Koeffizienten c_m , deren direkte Berechnung sehr umständlich wäre, aus dieser Beziehung indirekt ermitteln. Daß die direkte Berechnung von c_m die gleichen Resultate liefert, haben wir an c_2 und c_3 nachgerechnet; den allgemeinen Beweis hierfür haben wir jedoch nicht gefunden. Auf diese Weise erhält man zunächst für kleine Felder ($a \ll 1, b \ll 1$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} \approx \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2) + 16\pi^2 m c^2 \left(\frac{m c}{h}\right)^3 & \left[\frac{(a^2 - b^2)^2 + 7(a b)^2}{180} \right. \\ & \left. + \frac{13(a b)^2 (a^2 - b^2) + 2(a^2 - b^2)^3}{630} \dots \right]. \quad (43) \end{aligned}$$

Für den entgegengesetzten Grenzfall ($a \ll 1, b \gg 1$) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \approx \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2) + 16 \pi^2 m c^2 \left(\frac{m c}{h}\right)^3 \left\{ b^3 \left[\frac{1}{12} \log b - 0,191 \right] \right. \\ \left. + \frac{b}{4} [\log b - 0,145] + \frac{\log b}{8} + 0,202 - \frac{a^2}{12} [\log b + 0,116] \right. \\ \left. + b \left[\frac{a^2}{12} + \frac{a^4}{90} + \dots \right] + \dots \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

Um das allgemeine Verhalten von \mathcal{Q} für beliebige Felder besser überschauen zu können, haben wir noch versucht, eine Integraldarstellung für \mathcal{Q} zu gewinnen. Dies ist möglich, wenn man von den üblichen Integraldarstellungen der Zeta-Funktion ausgeht. Man erhält:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2) + 4 \pi^2 m c^2 \left(\frac{m c}{h}\right)^3 \int_0^\infty e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3} \left\{ -a \eta \operatorname{ctg} a \eta \cdot b \eta \operatorname{Ctg} b \eta + 1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta^2}{3} (b^2 - a^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2) + 4 \pi^2 m c^2 \left(\frac{m c}{h}\right)^3 \int_0^\infty e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3} \\ &\quad \left\{ -i a b \eta^2 \frac{\cos(b + i a) \eta + \cos(b - i a) \eta}{\cos(b + i a) \eta - \cos(b - i a) \eta} + 1 + \frac{\eta^2}{3} (b^2 - a^2) \right\}. \quad (45) \end{aligned}$$

Aus der letzten Form ist besonders einfach zu sehen, daß \mathcal{Q} nur von den beiden Invarianten $\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2$ und $(\mathcal{E}\mathcal{B})^2$ abhängt. Die Cos-Glieder gestatten nämlich eine Entwicklung nach dem Quadrat des Arguments $(b + i a)^2 = b^2 - a^2 + 2 i (a b)$ bzw. $(b - i a)^2 = b^2 - a^2 - 2 i a b$. Da das Gesamtergebn reell ist, kann es daher als Potenzreihe in $b^2 - a^2$ und $(a b)^2$ dargestellt werden, die allgemein durch $\frac{\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2}{|\mathcal{E}_k|^2}$ bzw. $\frac{(\mathcal{E}\mathcal{B})^2}{|\mathcal{E}_k|^4}$ ersetzt werden können. ($|\mathcal{E}_k| = \frac{m^2 c^3}{e h}$). Die Lagrange-Funktion lautet also für beliebig gerichtete Felder:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2) \\ &+ \frac{e^2}{h c} \int_0^\infty e^{-\eta} \frac{d\eta}{\eta^3} \left\{ i \eta^2 (\mathcal{E}\mathcal{B}) \frac{\cos\left(\frac{\eta}{|\mathcal{E}_k|} \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2 + 2 i (\mathcal{E}\mathcal{B})}\right) + \text{konj.}}{\cos\left(\frac{\eta}{|\mathcal{E}_k|} \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2 + 2 i (\mathcal{E}\mathcal{B})}\right) - \text{konj.}} \right. \\ &\quad \left. + |\mathcal{E}_k|^2 + \frac{\eta^2}{3} (\mathcal{B}^2 - \mathcal{E}^2) \right\}. \quad (45 a) \end{aligned}$$

Das erste Entwicklungsglied der Gleichung (43) stimmt mit den Resultaten von Euler und Kockel (l. c.) überein.

Allerdings bedarf die Frage nach der Konvergenz dieser Potenzreihenentwicklung noch einer näheren Untersuchung. Setzt man $a = 0$, so konvergiert das Integral (45) für jeden Wert von b . Wenn jedoch $a \neq 0$ ist, so verliert das Integral an den Stellen $\eta = \pi/a, 2\pi/a, \dots$, an denen $\operatorname{ctg} a \eta$ unendlich wird, seinen Sinn. Dementsprechend wird auch die Potenzreihenentwicklung nach a , von der wir ausgegangen sind, nur semikonvergent sein können. Man kann dem Integral (45) einen eindeutigen Sinn geben, wenn man einen Integrationsweg vorschreibt, der die singulären Stellen $\pi/a, 2\pi/a$ vermeidet. Das Integral (45) enthält aber dann zusätzliche imaginäre Glieder, die physikalisch nicht unmittelbar interpretiert werden können. Ihren Sinn erkennt man sofort, wenn man ihre Größe abschätzt. Das Integral um den Pol $\eta = \pi/a$ von (45) hat (für $b = 0$) den Wert $-\frac{2i}{\pi} \cdot 4 a^2 m c^2 \left(\frac{m c}{h}\right)^3 e^{-\frac{\pi}{a}}$. Dies ist die Größenordnung der Glieder, die von der Paarerzeugung im elektrischen Felde Rechenschaft geben. Das Integral (45) ist also ähnlich aufzufassen, wie die Integration über einen Resonanznenner in der Störungstheorie. Man kann annehmen, daß ein Dämpfungsglied, das der Häufigkeit des Resonanzprozesses entspricht, für die Konvergenz des Integrals sorgt und daß das Resultat, das man bei Umgehen der singulären Stellen erhält, richtig ist bis auf Glieder, deren Größe der Häufigkeit des Resonanzprozesses entspricht.

Die Abweichungen von der Maxwell'schen Theorie bleiben nach (43) und (44) sehr klein, solange \mathcal{E} und \mathcal{B} klein sind gegen das elektrische Feld, das im Abstand $\sqrt{137} \cdot e^2/mc^2$ vom Schwerpunkt eines Elektrons herrscht. Aber selbst wenn etwa das magnetische Feld diesen Wert überschreitet, so bleiben die Zusätze zu den Maxwell-Gleichungen klein (im Verhältnis zu den ursprünglichen Gliedern) von der relativen Ordnung $\frac{1}{3\pi} \frac{e^2}{h c}$, solange der $\log b$ von der Größenordnung 1 ist. Die Abweichungen z. B. von der gewöhnlichen Coulomb-Kraft zwischen zwei Protonen, die von den Gliedern (43) und (44) herrühren, bleiben also stets sehr klein. Allerdings muß bei dieser Abschätzung berücksichtigt werden, daß gerade für ein Coulombsches Feld die Zusatzglieder, welche die Ableitungen der Feldstärken enthalten, wichtiger sein können, als die in den Gleichungen (43) und (44) berücksichtigten.

§ 3. Bedeutung des Resultats in der Quantentheorie der Wellenfelder.

Die im letzten Abschnitt abgeleiteten Resultate können nicht ohne weiteres in die Quantentheorie der Wellenfelder übertragen werden. Viel-

mehr kann man leicht zeigen, daß der Zustand der Materie in einem homogenen Felde in der Quantentheorie der Wellenfelder nicht durch die gewonnenen Gleichungen beschrieben wird. Wenn man nämlich mit dem im letzten Abschnitt behandelten Zustand der Materie als „ungestörtem Zustand“ beginnt, so gibt es Matrixelemente der Störungsenergie, die zur gleichzeitigen Entstehung eines Lichtquants und eines Paares gehören. Wenn nun auch die Energie nicht zur wirklichen Erzeugung dieser Teilchen ausreicht, so geben diese Matrixelemente doch zu einer Ströungsenergie zweiter Ordnung Anlaß. Diese kommt also durch die virtuelle Möglichkeit des Entstehens und Verschwindens von Lichtquant und Paar zustande, und die Rechnung liefert für sie ein divergentes Resultat. Man kann das Auftreten dieser Störungsglieder auch anschaulich plausibel machen durch den Hinweis darauf, daß z. B. die Kreisbahnen in einem Magnetfeld keine wirklichen stationären Zustände sind, sondern daß Elektronen in diesen Zuständen strahlen können. In der klassischen Theorie der Wellenfelder braucht man — dies ist für den physikalischen Inhalt der Rechnungen des letzten Abschnitts entscheidend — diese Strahlung nicht zu berücksichtigen, da aus der schließlich gewonnenen Lösung zu erkennen ist, daß die Ladungsdichte und Stromdichte der Materie verschwindet, daß also keine Strahlung auftritt. In der Quantentheorie der Wellen dagegen bleibt ein Rest dieser Strahlung in Form einer divergenten Störungsenergie zweiter Ordnung.

Man kann allerdings auch einsehen, daß eine Störungsenergie genau der gleichen Art schon im *feldfreien* Vakuum eintritt („Selbstenergie des Vakuums“). Solche Selbstenergien treten immer dann auf, wenn man die Beiträge zweiter oder höherer Ordnung zur Energie berechnet, die durch den virtuellen Übergang in einen anderen Zustand *und Rückkehr in den Ausgangszustand* entstehen. Diese Selbstenergien hat man bisher stets weggelassen. Z. B. berechnet man den Wirkungsquerschnitt für die Compton-Streuung, indem man eine Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung durchführt. Würde man auch die Glieder vierter Ordnung mit berücksichtigen, so erhielte man Beiträge der eben erwähnten Art, die kein konvergentes Resultat liefern. Die Berechnung der Streuung von Licht an Licht (l. c.) wird in einer Störungsrechnung bis zur vierten Ordnung (also bis zur ersten Ordnung, die zu dem betreffenden Prozeß einen Beitrag liefert) durchgeföhrt, die Beiträge der sechsten Ordnung würden hier bereits divergieren. Die bisherigen Erfolge dieser Rechnungen, z. B. bei der Klein-Nishina-Formel, scheinen zu zeigen, daß dieses Weglassen der divergenten Beiträge höherer Ordnung zu richtigen Resultaten führt. Wenn dies der

Fall ist, so können nach dem eben Gesagten auch die Resultate des § 2 in die Quantentheorie der Wellen übernommen werden. Dies ist auch physikalisch plausibel, da das Auftreten der genannten Strahlungsglieder korrespondenzmäßig unverstündlich bliebe. Jedes einzelne Glied in der Entwicklung der Energiedichte nach Potenzen von \mathfrak{E} und \mathfrak{B} kann dann anschaulich einem Streuprozeß zugeordnet werden, dessen Wirkungsquerschnitt aus ihm bestimmt wird. Die Glieder vierter Ordnung z. B. geben die gewöhnliche Streuung von Licht an Licht, die Glieder sechster Ordnung bestimmen den Wirkungsquerschnitt für Prozesse, bei denen drei Lichtquanten aneinander gestreut werden usw. Ganz unabhängig von der Frage, ob das Weglassen der Glieder höherer Ordnung physikalisch zulässig ist, muß dabei jedes Entwicklungsglied im Resultat des letzten Abschnitts mit dem Resultat einer direkten Berechnung des betreffenden Streuprozeses nach der Quantentheorie der Wellen übereinstimmen, wenn die Störungsrechnung nur bis zu dem ersten Gliede durchgeföhrt wird, das zum betreffenden Prozeß einen Beitrag liefert; denn in beiden Rechenmethoden sind die Beiträge der Glieder vernachlässigt, die einem Entstehen und Verschwinden von Lichtquant und Paar entsprechen. [Die Übereinstimmung der Glieder vierter Ordnung mit den durch direkte Berechnung der Streuung von Licht an Licht gewonnenen¹⁾ gibt daher eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.] Es scheint aus diesem Grunde nicht unmöglich, daß selbst die Resultate für $|\mathfrak{B}| \geq |\mathfrak{E}_k|$ auf die Erfahrung angewendet werden können. Dies ist aber sicher *nicht* möglich für $|\mathfrak{E}| \gtrsim |\mathfrak{E}_k|$, da bei großen elektrischen Feldern die tatsächlich eintretende Paarbildung den oben durchgeföhrtten Rechnungen die Grundlage entzieht.

§ 4. Die physikalischen Konsequenzen des Resultats.

Die im zweiten Abschnitt hergeleiteten Resultate haben formal eine große Ähnlichkeit mit den Ansätzen, die Born²⁾ seiner Abänderung der Maxwell'schen Gleichungen zugrunde gelegt hat. Auch bei Born tritt an die Stelle der klassischen Lagrange-Funktion $\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2$ eine kompliziertere Funktion der beiden Invarianten $\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{B}^2$ und $(\mathfrak{E}\mathfrak{B})^2$, die übrigens [vgl. ¹⁾] in der Größenordnung der ersten Entwicklungsglieder wegen des tatsächlichen Zahlwertes von $e^2/\hbar c$ mit (43) übereinstimmt. Es ist jedoch wichtig, auch die Unterschiede der Resultate hervorzuheben. Von Born werden die veränderten Maxwell'schen Gleichungen zum Ausgangspunkt der

¹⁾ H. Euler und B. Kockel l. c. — ²⁾ M. Born, Proc. Roy. Soc. London (A) 143, 410, 1933; M. Born und L. Infeld, ebenda 144, 425, 1934; 147, 522, 1934; 150, 141, 1935.

Theorie gemacht, während diese Veränderung in der Diracschen Theorie als eine indirekte Konsequenz der virtuellen Möglichkeit der Paarerzeugung erscheint. Damit hängt zusammen, daß in der Diracschen Theorie die hier berechneten Abänderungen der Maxwell'schen Gleichungen keineswegs die einzigen sind — es kommen noch Glieder, welche höhere Ableitungen der Feldstärken enthalten, hinzu¹⁾ — und daß daher insbesondere die Frage nach der Selbstenergie der Elektronen gar nicht durch die Betrachtung dieser Abänderungen allein entschieden werden kann. Dabei bleibt das Resultat der Born'schen Theorie, daß Abänderungen der Maxwell-Gleichungen der hier betrachteten Größenordnung unter Umständen genügen, um die Schwierigkeiten der unendlichen Selbstenergie zu beseitigen, ein wichtiger Hinweis für die weitere Entwicklung der Theorie.

In diesem Zusammenhang muß auch die Frage gestellt werden, ob die aus der Diracschen Theorie abgeleiteten Resultate über die Streuung von Licht an Licht usw. schon als endgültig betrachtet werden können, oder ob zu erwarten ist, daß die spätere Theorie zu anderen Ergebnissen führt. Die Theorie des Positrons und die bisherige Quantenelektrodynamik sind zweifellos als vorläufig anzusehen. Besonders erscheinen in dieser Theorie die Vorschriften für die Bildung der Matrix S (die Inhomogenität der Dirac-Gleichung) willkürlich. Für die spezielle in l. c. I eingeführte Matrix S läßt sich kaum viel mehr als ihre relative mathematische Einfachheit (zusammen mit einigen Forderungen über die Formulierung der Erhaltungssätze) vorbringen. Aus diesem Grunde erscheinen Abweichungen der späteren Theorie von der bisherigen an diesem Punkte möglich. Da solche Abweichungen gerade auf die Abänderungen der Maxwell'schen Gleichungen einen bestimmenden Einfluß ausüben könnten, so wird man sich auf die bisherige Theorie wohl nur in der Größenordnung und der qualitativen Form dieser Abänderungen verlassen können. Es ist jedoch bisher auch kaum möglich, über die endgültige Form der Maxwell'schen Gleichungen in der zukünftigen Quantentheorie des Feldes bestimmte Aussagen zu machen, da dazu ein Eingehen auf die Gesamtheit der Vorgänge, an denen Teilchen sehr hoher Energie beteiligt sind (z. B. Auftreten der „Schauer“), wohl unerläßlich ist.

¹⁾ E. A. Uehling l. c. und R. Serber l. c.

Zur Theorie der Schlauchentladungen.

Von R. Seeliger und K. Sommermeyer in Greifswald.

(Eingegangen am 27. Dezember 1935.)

Es werden die Grundlagen einer Theorie der Einschnürung des Entladungsquerschnitts entwickelt, die man in elektronegativen Gasen beobachtet hat. Das Wesentliche ist, daß die im Konzentrationsgefälle nach außen wandernden Elektronen sich durch Anlagerung in negative Ionen verwandeln, und daß diese Ionen dann umkehren und dem elektrischen Querfeld folgend nach innen wandern. Je nach den Versuchsbedingungen werden die Ionen vernichtet durch Wiedervereinigung oder durch Entionisierung, woraus sich eine Einteilung der Schlauchentladungen in zwei Grundformen ergibt.

Mit der eigentümlichen Einschnürung des Entladungsquerschnitts, die man in elektronegativen Gasen beobachtet, haben sich bisher nur wenige experimentelle Arbeiten beschäftigt. Wulfhekel und der eine von uns¹⁾ hatten schon vor längerer Zeit ein bereits recht aufschlußreiches Beobachtungsmaterial mitgeteilt, und Keller²⁾ hat kürzlich, allerdings in einem anderen Druck- und Strombereich und ohne auf unsere Ergebnisse einzugehen, einige weitere Messungen angestellt. Zur Theorie liegt bisher überhaupt nur eine kurze Notiz von Güntherschulze³⁾ vor; in ihr werden theoretische Vorstellungen entwickelt auf Grund eines als „Ionenmantel-effekt“ bezeichneten Vorgangs. Wir sind nun inzwischen zu einer Theorie jener Einschnürungen gelangt, die von den Vorstellungen Güntherschulzes grundsätzlich verschieden ist. Hierüber zu berichten, dürfte nützlich sein, weil es sich nicht nur um eine kleine Teilfrage aus der Theorie der Gasentladungen, sondern um das Verständnis einer Gruppe von Entladungsformen handelt, denen man recht oft begegnet und die auch von erheblicher praktischer Bedeutung sind. Wir hatten diese Formen als „Schlauchentladungen“ bezeichnet; es ist das ein neutraler, nur das Aussehen der Entladung beschreibender Name, der damals lediglich gewählt wurde zur Unterscheidung von den „kontrahierten Entladungen“, worauf wir noch zurückkommen werden. Die Bezeichnung „Ionenmantel“ hingegen nimmt bereits eine ganz bestimmte theoretische Vorstellung vorweg und beschreibt diese sogar sehr anschaulich und eindeutig. Gerade deshalb aber halten wir sie für gefährlich; denn wir sind zu dem Ergebnis gekommen, daß es nicht nur keinen Ionenmantel gibt, sondern daß im Gegenteil die

¹⁾ R. Seeliger, Phys. ZS. **33**, 316, 1932; H. Wulfhekel u. R. Seeliger, ebenda **34**, 57, 1933. — ²⁾ F. Keller, ZS. f. Phys. **97**, 8, 1935. — ³⁾ A. Güntherschulze, ebenda **91**, 724, 1934.