

## Der Kaffee ist zu heiß – das Newtonsche Abkühlungsgesetz

Das Newtonsche Abkühlungsgesetz beschreibt einen Abkühlungsprozeß mit folgender Differentialgleichung (Anfangswertproblem):

$$u'(t) = -k(u(t) - a), \quad u(0) = u_0,$$

dabei ist  $u$  die Temperatur des betrachteten Objekts (Festkörper oder auch Flüssigkeit),  $a$  die konstante Umgebungstemperatur und  $k > 0$  die konstante Abkühlungsrate.

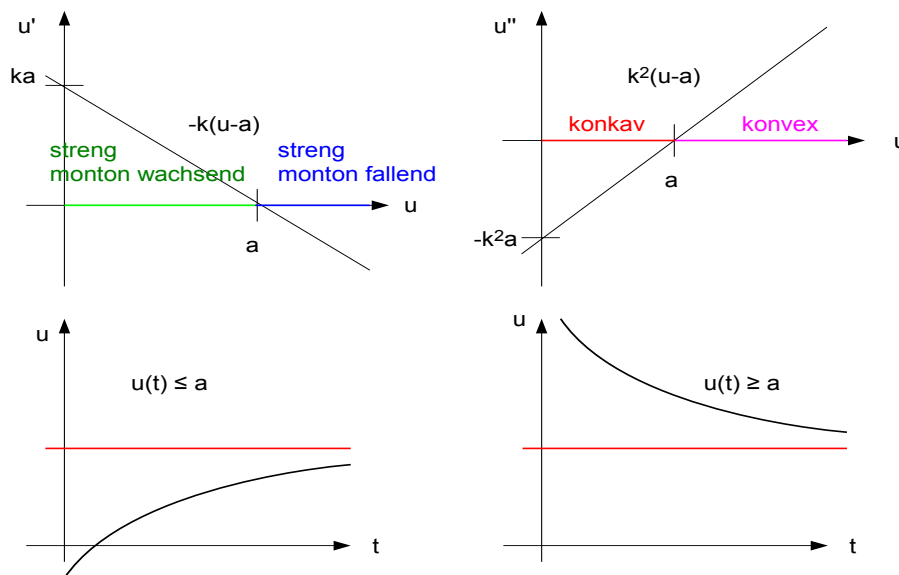
Wie sieht die Funktion  $u(t)$  aus? Wir kennen zwar  $u(t)$  nicht, aber  $u'(t)$  ist gegeben. Was wissen über die Funktion  $u(t)$ ?

**Monotonieverhalten.** Für  $u(t) > a$  ist  $u'(t) = -k(u(t) - a) < 0$  und die Funktion  $u(t)$  ist *streng monoton fallend*. Dagegen gilt für  $u(t) < a$  die Beziehung  $u'(t) = -k(u(t) - a) > 0$  und die Funktion  $u(t)$  ist *streng monoton wachsend*.

**Krümmungsverhalten.** Wir bilden die zweite Ableitung von  $u(t)$  :

$$u''(t) = (-k(u(t) - a))' = -ku'(t) = (-k)(-k)(u(t) - a) = k^2(u(t) - a)$$

und damit *konvex* für  $u(t) > a$  und *konkav* für  $u(t) < a$ .



Wie sieht die Lösung tatsächlich aus? Dazu lösen wir die Differentialgleichung. Zunächst erhält man, dass  $u(t) = a = \text{const}$  eine Lösung der Differentialgleichung ist. Ist  $u(t) \neq a$ , so dividieren wir durch  $u - a$  und erhalten

$$\frac{u'}{u - a} = -k.$$

Integrieren wir nun unbestimmt nach der Zeit  $t$ , so folgt

$$\int \frac{u'}{u - a} dt = \int \frac{du}{u - a} = \ln |u - a| = - \int k dt = -kt + c,$$

Anwenden der Exponentialfunktion führt auf

$$|u - a| = e^{-kt+c} = e^{-kt} e^c.$$

Wir können den Betrag folglich auflösen zu

$$u(t) - a = C e^{-kt}, C \in \mathbb{R}, \iff u(t) = a + C e^{-kt}, C \in \mathbb{R}.$$

Berücksichtigung der Anfangsbedingung ergibt:  $u(0) = a + C$  und damit

$$u(t) = a + (u(0) - a)e^{-kt}.$$

Auswertung:

- Ist  $u(0) > a$ , so nimmt  $u(t)$  mit der Zeit ab und nähert sich für  $t \rightarrow \infty$  der Umgebungstemperatur  $a$ .
- Ist dagegen  $u(0) < a$ , so nimmt  $u(t)$  mit der Zeit zu und nähert sich für  $t \rightarrow \infty$  ebenfalls der Umgebungstemperatur  $a$ .

**Wann ist der Kaffee kühler?**

Annahmen:

- Die Abkühlung erfolgt nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz.
- Die Temperatur einer Mischung von einer Flüssigkeitsmenge  $p$  mit der Temperatur  $T_0$  und einer Flüssigkeitsmenge  $q$  mit einer Temperatur  $T_1$  führt sofort dazu, dass die Mischungsmenge  $p + q$  die Temperatur  $\frac{pT_0 + qT_1}{p+q}$  hat.
- Die Temperatur der Milch ist geringer als die Zimmertemperatur (=Umgebungstemperatur).

Wann ist der Kaffee kühler?

1. Der Kaffee kühlt zunächst 10 Minuten ab und die Milch wird dann hinzugegeben.
2. Die Milch wird sofort in den Kaffee geschüttet und die Mischung kühlt dann 10 Minuten ab.

Was glauben Sie? Gehen wir mathematisch vor. Es sei  $T_0$  die Temperatur des Kaffees,  $T_1 < a$ , die Temperatur der Milch,  $a$  die Umgebungstemperatur (Milch kommt aus dem Kühlschrank).

Im Fall 1) ist die Temperatur des Kaffees nach  $t_1 = 10$  Minuten:

$$a + (T_0 - a)e^{-kt_1}$$

wird der Kaffee nun mit der Milch gemischt, so ist die resultierende Temperatur:

$$\frac{p(a + (T_0 - a)e^{-kt_1}) + qT_1}{p + q}.$$

Dagegen gilt im 2. Fall, dass die Anfangstemperatur der Mischung gerade  $\frac{pT_0+qT_1}{p+q}$  und zum Zeitpunkt  $t_1$  nun gerade

$$a + \left( \left( \frac{pT_0 + qT_1}{p + q} \right) - a \right) e^{-kt_1}$$

ist.

Welche Temperatur ist größer bzw. kleiner? Dazu betrachten wir die Differenz:

$$\begin{aligned} & \frac{p(a + (T_0 - a)e^{-kt_1}) + qT_1}{p + q} - a - \left( \left( \frac{pT_0 + qT_1}{p + q} \right) - a \right) e^{-kt_1} \\ = & \frac{p}{p + q} (a + (T_0 - a)e^{-kt_1} - T_0e^{-kt_1}) + \frac{q}{p + q} (T_1 - T_1e^{-kt_1}) - a + ae^{-kt_1} \\ & = \frac{p}{p + q} (a(1 - e^{-kt_1})) + \frac{q}{p + q} T_1(1 - e^{-kt_1}) - a(1 - e^{-kt_1}) \\ = & \frac{q}{p + q} T_1(1 - e^{-kt_1}) + a(1 - e^{-kt_1}) \left( \frac{p}{p + q} - 1 \right) = \frac{(1 - e^{-kt_1})}{p + q} (qT_1 - qa) \\ & = \frac{q}{p + q} (1 - e^{-kt_1})(T_1 - a) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist negativ, wenn  $T_1 < a$  gilt, d.h. der Kaffee ist bei Methode 1) (erst kühlt der Kaffee ab und dann wird die Milch dazugegeben) kühler als bei der Methode 2), wenn die Temperatur der Milch kleiner als die Umgebungstemperatur ist.